

Introduzione

1.1 Cenni storici

Le origini della biomeccanica sono antiche. Sumeri, Assiro-Babilonesi, Egizi, Feni-cio-Punici, Maya e altri, avevano sviluppato profonde conoscenze sulla natura, nelle quali i risultati dell'osservazione e dell'esperienza erano profondamente intrecciati ai miti e alle credenze religiose. Soltanto in seno alla civiltà Greca nacquero i primi tentativi di separare la conoscenza della natura dal mito e dalla religione, sviluppando quella che oggi chiamiamo "osservazione scientifica". La libertà degli scambi commerciali, i rapporti con le altre Civiltà, l'affrancamento dai condizionamenti della superstizione e della religione, diedero luogo al formidabile sviluppo delle discipline scientifiche nel periodo dal VI al IV secolo a.C. Il clima di libertà e di pace sociale portato dallo sviluppo economico, promosse la conoscenza dell'uomo, nelle sue multiformi attività ed espressioni. L'armonia tra lo spirito e il corpo, ideale della Civiltà Greca, portò all'interesse per le attività atletiche e per il movimento umano. Le raffigurazioni artistiche, le sculture in particolare, indicano la profonda conoscenza dell'anatomia e della dinamica del movimento.

La filosofia della natura. La scuola filosofica con questo nome fu fondata da Talete (624–545 a.C.). Il fine della scuola era lo studio della natura, separato da quello dei temi religiosi. In quel periodo si svilupparono le basi della matematica, astronomia, meccanica, fisica, geografia e medicina. Per noi le personalità più rilevanti sono Pitagora e Ippocrate. Pitagora, nato intorno al 582 a.C., fondò una comunità di uomini e donne divisi gerarchicamente in due gruppi, gli scienziati e gli uditori.

Gli scienziati avevano facoltà di porre domande al Maestro ed esprimere le proprie idee, gli uditori si dedicavano principalmente allo studio. Secondo Pitagora: "tutte le cose hanno una forma, e tutte le forme possono essere espresse mediante numeri". Ponendo in relazione numeri e forme geometriche egli cercava di dimostrare che l'armonia e l'ordine della natura erano rappresentabili matematicamente. Ippocrate (460-370 a.C.) viaggiò

intensamente per tutta la Grecia. Il suo approccio alla medicina diagnostica, separata da pregiudizi soprannaturali, era nuovo per quei tempi.

Sosteneva che ogni fenomeno fosse dovuto a una causa, essendo il caso fortuito un modo di giustificare l'ignoranza. Il suo pensiero è stato fondamentale per lo sviluppo di: Fondamenti di Meccanica e Biomeccanica. Meccanica dei corpi rigidi articolati.

DOI 10.1007/978-88-470-2333-8_1, © Springer-Verlag Italia 2013

2

1 Introduzione

dell'indagine razionale, basata sull'osservazione e l'esperienza. L'inizio dell'attività di un medico all'uscita dall'Università è significativamente segnato dal giuramento di operare secondo i principi che Ippocrate aveva formulato.

Il IV secolo a.C. rappresentò per la Grecia Classica un momento critico. La di-sintegrazione politica e sociale si manifestò nella diffusa corruzione, nella violenza di continue guerre e sommovimenti, nel passaggio da un clima di fede e speranza nel potere della scienza e della cultura, a un ripiegamento su temi etici e contemplativi.

In questo scenario dominano le figure di Platone e Aristotele. La filosofia di Platone (427–347 a.C.) influenza ancora oggi il nostro modo di concepire e interpretare la realtà. Tutto quello che troviamo nel mondo dell'esperienza e della materia non è altro che immagine riflessa di un dominio astratto, il mondo delle idee, immutabile e perfetto. Per questo è illusorio pensare di poter raggiungere la vera conoscenza attraverso i nostri sensi, perché sensazioni ed esperienze potranno darci soltanto una comprensione difettosa e alterata della realtà. La conclusione è che soltanto la contemplazione, non l'azione, può portare l'uomo verso la verità e la conoscenza.

L'universo è per Platone mosso dal suo creatore divino, le stelle e i pianeti, le sfere celesti, sono entità spirituali in eterno movimento.

Aristotele (384–322) era figlio di Nicomaco, medico del re Macedone Aminta.

Da ragazzo fu fortemente influenzato dalla filosofia platonica, da cui in seguito si distaccò. La scuola Peripatetica fondata da Aristotele in origine deriva il suo nome dai peripatoi (per-patoi, “colonnati”) del ginnasio di Atene, dove i membri si riunivano, che si trovava presso il santuario dedicato ad Apollo Licio da cui deriva l’altro nome della scuola: il Liceo. Aristotele era uno scienziato e filosofo universale, i suoi interessi comprendevano la meccanica, la matematica, la fisica, la zoologia, la botanica e la psicologia. Sosteneva che scopo della scienza fosse la comprensione della natura e che la matematica fosse lo strumento per acquisirla. Aristotele non superò il dualismo platonico, tra mondo dell’esperienza e delle idee, ma, a differenza di Platone sostenne che solo nel mondo naturale si trovava la realtà e l’essenza delle cose, mentre le idee erano soltanto astrazioni tratte dalla generalizzazione delle cose reali.

Quest’osservazione non comprendeva comunque la sperimentazione, perché la contemplazione era per lui il solo mezzo per raggiungere la conoscenza. Per Aristotele gli elementi osservabili nell’universo erano quattro, fuoco, aria, acqua e terra. Erano disposti in sfere concentriche, di cui la terra occupava il centro. Oltre queste erano le sfere dei pianeti, delle stelle e quindi il nulla. La luna divideva l’universo in due parti, quella celeste e quella terrestre, con movimenti diversi. I movimenti dei corpi avvenivano sempre secondo traiettorie rettilinee sulla terra, mentre nella zona celeste erano circolari, eterni e indipendenti dalle leggi terrestri.

Per Aristotele ogni movimento o cambiamento presupponeva una causa, “tutto ciò che si muove, è spinto da un movente, presente nel corpo che si muove o in diretto contatto”. L’azione a distanza non era concepita. Secondo Aristotele un corpo lasciato cadere assumeva una velocità direttamente proporzionale al suo peso e inversamente alla densità del mezzo. I quattro elementi e le loro proprietà caratteristiche, calore, freddo, umidità e secchezza si combinavano per produrre i quattro umori del corpo umano, sangue, flegma, bile gialla e nera. Il cuore era la sede dell’intelligenza.

I movimenti del corpo erano prodotti dal “pneuma” che passava dal cuore al resto del

1.1 Cenni storici

3

corpo. I concetti di cambiamento e movimento dominano la filosofia Aristotelica. Il suo trattato *Sul movimento degli animali*, basato su osservazioni empiriche, descrive per la prima volta geometricamente i movimenti e la locomozione umana. Il trattato dimostra che Aristotele possedeva una profonda conoscenza delle funzioni delle ossa e dei muscoli. Aristotele illustrò anche la presenza delle forze di reazione affermando: “quando uno spinge viene spinto”. Ad Aristotele e alla sua Scuola dobbiamo lo sviluppo della logica, che attraverso leggi codificate conduce il pensiero razionale da certe premesse o assiomi, alle conclusioni che ne discendono.

Con la conquista di Alessandro Magno ebbe inizio il periodo Ellenistico nel quale centro della speculazione scientifica divenne la città di Alessandria. Erofilo, nel III secolo a.C. pose le basi dell'anatomia moderna con un approccio sistematico fondato sulla dissezione e l'identificazione di vari organi. Distinse la funzione dei tendini, dei nervi, delle arterie e delle vene, asserendo che le arterie erano sei volte più spesse delle vene e in esse fluiva il sangue, non aria. Confutò inoltre l'asserzione aristotelica che sede dell'intelligenza fosse il cuore, individuandola correttamente nel cervello.

Erasistrate, allievo di Erofilo, studiò a fondo l'anatomia, analizzando il fenomeno della contrazione muscolare.

Archimede di Siracusa (287–212 a.C.) era figlio di un astronomo, Fedia, che lo introdusse allo studio della matematica e dell'astronomia. La sua genialità si dispiegò nell'invenzione di ordigni bellici (catapulte, specchi ustori, leve e pulegge). Sua l'affermazione “datemi un appoggio e solleverò il mondo”. Conosceva bene i metodi geometrici e matematici per la misura della lunghezza delle curve, delle aree e dei volumi. Usò acutamente questi metodi per determinare il baricentro di figure piane e solidi. Scopri inoltre l'azione idrostatica sui corpi immersi in un fluido. Si dice che la scoperta avvenisse mentre faceva il bagno. Lo studio del movimento lo impegnò a lungo, portandolo a determinare il valore della forza necessaria per muovere un corpo pesante. Le applicazioni della geometria Euclidea impiegata da Archimede formano le basi della meccanica razionale, in particolare della

statica e dell'idrostatica. I suoi risultati dominano queste scienze sino all'avvento di Stevin (1548–1609) e Galileo (1564–1642). Si dice sia stato ucciso da un soldato Romano mentre, seduto per terra, studiava alcune figure geometriche tracciate sulla sabbia. All'avvicinarsi del soldato Archimede avrebbe gridato “fermati”, per proteggere i suoi disegni e il soldato, incollerito, lo avrebbe ucciso sul posto.

Il sorgere della potenza di Roma erose i fondamenti della scienza Greca. L'attenzione virò sull'etica, mentre la scienza si volse principalmente allo sviluppo di fortificazioni, armi e giochi. Erone di Alessandria (62 a.C.), scrisse trattati di meccanica, ottica e pneumatica, dove espose i principi alla base delle sue invenzioni. Tra queste il prototipo di un motore a vapore, che metteva in rotazione un globo circolare. Il vapore e i gas compressi vennero anche usati per realizzare azionamenti, un carosello in miniatura, la chiusura e l'apertura di un sifone. Le invenzioni di Erone furono usate soltanto per intrattenimento e non per scopi pratici. È impressionante sapere che i principi di funzionamento delle turbine a gas e a vapore, macchine di enorme importanza oggi per la conversione dell'energia termica in meccanica, siano stati scoperti nel corso dell'invenzione di giochi e curiosità da mostrare per intrattenimento.

4

1 Introduzione

Galeno (129–201 a.C.) studiò la medicina a Pergamo. Le sue straordinarie doti intellettuali ne fecero subito un personaggio di spicco. A ventotto anni divenne medico alla Scuola dei Gladiatori, con il ruolo che oggi chiameremo di “medico dello sport”.

Per quattro anni praticò la chirurgia e l'arte dietetica, acquisendo grande esperienza e conoscenza del movimento umano e dell'anatomia. In riconoscimento del suo talento, l'imperatore Marco Aurelio lo nominò medico Imperiale, funzione che ricoprì per circa 20 anni. Galeno dedicò la sua vita alla ricerca, scrivendo circa 500 trattati scientifici. Molti di questi furono distrutti da un incendio nel 191 d.C. In ciò che è fortunatamente rimasto, Galeno, riprendendo la teoria ippocratica degli elementi, descrisse la medicina sulla base dei “quattro umori corporei”. Tra le maggiori opere si

trovano i diciassette volumi di *De usu partium*. Si tratta del primo testo di fisiologia, che conservò un'incontestabile autorità per circa 1300 anni, sino a Vesalio (1514–1564) e a William Harvey (1578–1657). Galeno, come Platone, sosteneva che la creazione fosse opera di un'unica forza creatrice, la natura o *physis*. Questo particolare ha fatto sì che le sue teorie fossero accettate dai filosofi delle tre grandi religioni monoteiste (cristiana, ebraica e islamica). Fonte della vita era il pneuma (aria, alito, spirito), in seguito identificato con l'anima. Lo spirito animale, con sede nel cervello, controllava movimenti, percezione e sensi, mentre lo spirito vitale, con sede nel cuore, controllava il sangue e la temperatura corporea; lo spirito naturale, situato nel fegato, era alla base del metabolismo. Galeno credeva nella medicina come scienza interdisciplinare comprendente l'anatomia e la fisiologia. *De motu musculorum* è una testimonianza della sua passione per l'analisi del movimento. L'opera, che stabilisce i fondamenti della miologia, mostra enormi progressi rispetto alle conoscenze del tempo. Secondo Galeno i muscoli contenevano una rete nervosa che trasmetteva lo *spiritus animalis* dal cervello ai muscoli stessi, provocando la contrazione. Erano distinte le funzioni dei muscoli scheletrici e di altri muscoli come il cuore e lo stomaco. Veniva anche individuata la funzione agonista-antagonista dei muscoli e chiarita l'esistenza del to-no muscolare. I nervi sensori furono distinti da quelli motori. In Galeno è presente, data la grande cultura matematica, l'ambizione di fare della medicina una scienza esatta. Come anatomista produsse dettagliate descrizioni dei muscoli e dei nervi, con osservazioni straordinarie sulla correlazione tra il danno al midollo spinale, ai nervi craniali e cervicali e la paralisi di alcuni organi. Galeno applicava rigidamente i suoi principi anche davanti all'esperienza che li contraddiceva.

Il Medioevo portò un contributo minimo al progresso delle scienze della natura, iniziato brillantemente nella Grecia classica. La traduzione in arabo dei principi delle scienze naturali salvò quest'eredità del passato dall'oblio. L'anello di congiunzione tra l'antichità classica e l'Europa del Medioevo furono le dottrine neoplatoniche, espresse nel III secolo d.C. Il neoplatonismo nacque nel momento in cui l'uomo, spinto da una profonda crisi interiore, avvertiva maggiormente la caducità della realtà sensibile. Era l'epoca del tardo ellenismo, un periodo di grandi difficoltà e sconvolgimenti, preludio alla caduta dell'Impero romano, ma culturalmente fecondo per la varietà di correnti filosofiche e religiose e per la diffusione del messaggio cristiano.

Maggiore esponente e fondatore del neoplatonismo, fu Plotino di Licopoli, che visse nella prima metà del III secolo e studiò ad Alessandria. Qui assimilò i fermenti cul-turali della filosofia greca e della mistica orientale, egiziana ed asiatica. Di fronte alle

1.1 Cenni storici

5

incertezze del suo tempo, Plotino si rese conto di essere alle soglie di una nuova epoca, e sentì la necessità di ricorrere alla saggezza e alla sapienza degli antichi. Intorno ai quarant'anni si trasferì a Roma, dove fondò una scuola neoplatonica. Qui elaborò un'esegesi del pensiero Platonico integrando dottrine aristoteliche e in parte anche stoiche. Il metodo filosofico cui s'ispirò era la logica formale di non-contraddizione, secondo cui un pensiero evita di contraddirsi solo quando riconosce in se stesso la verità dell'essere. Al di fuori di questa suprema unità di essere e pensiero si rimane nella contrapposizione tra soggetto e oggetto della conoscenza, che secondo logica non possono sussistere separatamente, perché si implicano a vicenda.

Da Platone egli riprese la distinzione tra mondo iperuranico, dove hanno sede unità, razionalità e perfezione, e mondo terreno sottoposto alla divisione, alla caducità, e al non-senso. Egli conservò anche la visione della filosofia come dialettica, per ricucire queste lacerazioni e approdare al regno delle idee, nel quale è presente la dimensione eterna del vero, del buono e del bello.

Plotino conciliò le idee platoniche anche con la filosofia di Aristotele. Partendo dalla natura, egli notava come negli organismi sia presente un unico substrato o logos da cui scaturisce il molteplice. Mentre l'artigiano costruisce l'uno dai molti mettendo insieme più parti, la vita sembra nascere da un principio semplice che si articola nel complesso. Plotino chiamò Anima del mondo la sostanza vitale da cui prendono forma le piante, gli animali e gli esseri umani. I gradi inferiori della natura possono evolversi e formare organismi più intelligenti e progrediti, perché l'intelligenza è già presente dentro la natura. Ciò è possibile perché l'Anima discende dalle Idee platoniche che, per suo tramite, diventano aristotelicamente le ragioni

immanenti e costitutive degli organismi materiali. Le Idee restavano tuttavia trascendenti, e concepite come infinite sfaccettature di un medesimo Pensiero autocosciente, che pensandosi si rende oggetto a se stesso; in esso era realizzata l'identità parmenidea di essere e pensiero. Tale identità era però ancora l'unione di due realtà distinte, benché coincidenti. Occorreva allora ammettere il puro Uno sopra questa stessa identità, quale principio supremo del tutto. In tal modo egli formulò la dottrina delle tre ipostasi, l'Uno, l'Intelletto e l'Anima.

Nel *Timeo* Platone aveva formulato la dottrina del microcosmo e del macrocosmo che correla la natura e la struttura dell'universo con quelle del mondo terreno.

I fenomeni naturali, il movimento e il cambiamento erano spiegati attraverso modelli che combinavano umori, organi, stagioni, punti cardinali ed eventi astronomici. Sant'Agostino incorporò gli elementi della filosofia neoplatonica nelle credenze cristiane, scoraggiando la ricerca scientifica. Le sole cose da conoscere secondo Sant'Agostino erano Dio e l'anima. Ogni investigazione nel dominio della natura era inutile e dannosa. Nel XIII secolo i canoni Aristotelici tradotti dall'arabo furono integrati nelle credenze cristiane da San Tommaso d'Aquino. Le Università gestite da Domenicani e Francescani abbracciarono le dottrine Aristoteliche.

Il Rinascimento Italiano fiorito dal 1450 al 1527 seguì il disordine politico dell'Italia del '400 e mise le basi per la riaffermazione della libertà morale e intellettuale dell'uomo, "misura di tutte le cose". L'autorità della Chiesa fu sostituita da quella degli anziani. Il governo liberale e munifico dei Medici a Firenze diede luogo a una fioritura delle arti mai vista in precedenza, con Michelangelo, Leonardo, Ma-

6

1 Introduzione

chiavelli. Anche se il Rinascimento non mostrò un immediato interesse per la scienza, esso postulò una rinnovata libertà nella ricerca, preparando la rivoluzione scientifica del '600. Le attività intellettuali acquistarono una

rilevanza sociale, perdendo la soggezione all'ortodossia religiosa e distinguendosi dagli studi mistici.

In questa straordinaria stagione spicca la figura di Leonardo da Vinci, artista, scrittore, ingegnere sommo. La sua straordinaria intelligenza, applicata a numerosi campi del sapere, è testimoniata dalle invenzioni, le opere d'arte, gli scritti. Leonardo iniziò la sua educazione come autodidatta, per recarsi poi, su iniziativa del padre, alla scuola del Verrocchio a Firenze, collaborando al dipinto *il battesimo di Cristo*.

Avendo visto il suo allievo all'opera, Verrocchio giurò di non toccare più un pen-nello per il futuro. Come ingegnere civile e militare Leonardo produsse stupefacenti invenzioni, tra cui apparati per la distillazione, sci d'acqua, l'elicottero, il paracadute, l'aliante, un cannone a vapore. Molte invenzioni non ebbero seguito immediato nella pratica, soprattutto per il ritardo della tecnologia del tempo. L'elicottero di Leonardo non poté volare per la mancanza di un motore di potenza sufficiente. Leonardo diede importanti contributi alla conoscenza della meccanica, studiando la relazione tra le forze e il movimento da esse prodotto. Le sue speculazioni anticiparono la terza legge della dinamica. Durante lo studio del moto degli uccelli scrisse: "Un oggetto incontra nel suo moto una resistenza da parte dell'aria, uguale a quella che l'aria riceve dall'oggetto". Non arrivò comunque a formulare la relazione tra massa, forza e accelerazione, che sarebbe stata in seguito, espressa da Newton. L'applicazione dei principi della meccanica al movimento umano e al funzionamento dei muscoli segnò un deciso avanzamento delle conoscenze del tempo. Grazie alla sua capacità di rappresentazione e alle conoscenze anatomiche, Leonardo riuscì a chiarire il funzionamento dei muscoli, delle articolazioni e dei segmenti ossei.

Vesalio (1514–1564) nacque durante gli ultimi anni della vita di Leonardo. Nato in una famiglia di medici ricevette un'istruzione profonda in medicina e pubblicò regolarmente i risultati delle sue ricerche. Originariamente seguace di Galeno, rilevò numerose contraddizioni tra i risultati ottenuti durante le sue dissezioni e quelli di Galeno. Si convinse infine che le analisi di Galeno erano estensioni all'anatomia umana di rilievi compiuti su animali. Vesalio dimostrò che i muscoli si accorciano e si gonfiano durante la contrazione, suscitando un dibattito sulla natura e la funzione dei nervi e dei muscoli. L'opera *De humanis corporis fabrica libri septem* pose le basi

dell'anatomia moderna, insieme con l'aperta dichiarazione a favore della dissezione umana in anatomia.

La rivoluzione scientifica del '500 nacque da premesse simili a quelle del Rinascimento Italiano. Principi, re, grandi famiglie, uomini benestanti, promossero le arti e la scienza per dare lustro e fama alla propria casata. I nuovi metodi della scienza basati sull'osservazione sperimentale e il ragionamento fuori da ogni pregiudizio e condizionamento religioso, portarono alla necessità di rivedere e aggiornare l'interpretazione della Bibbia, cosa che produsse tensioni nei rapporti tra la scienza e la Chiesa.

Galileo (1564–1642) ricevette la sua prima istruzione a Firenze e si laureò a Pisa.

Iniziò a investigare sulla teoria Aristotelica della caduta dei gravi, dimostrando l'erroneità dell'affermazione che la velocità di caduta fosse correlata al peso del corpo.

Galileo può essere considerato il padre della biomeccanica per le sue sistematiche

1.1 Cenni storici

7

investigazioni sul salto nell'uomo, l'analisi del cammino dei cavalli e degli insetti, le condizioni di equilibrio di un corpo umano immobile. Le sue investigazioni si spinsero anche all'analisi delle sollecitazioni sugli elementi ossei, considerati come parti strutturali. Particolarmente interessante la sua indagine sulle possibilità di crescita negli animali. Secondo Galileo le dimensioni degli animali non potevano crescere indefinitamente senza incontrare un qualche limite fisico. Oggi sappiamo che se aumentiamo proporzionalmente le dimensioni di un corpo, il peso cresce col cubo delle dimensioni lineari, mentre le sezioni che sopportano questo peso crescono col quadrato. Da questo nasce un limite per le dimensioni degli animali dotati di arti di sostegno. Galileo fu un acceso sostenitore della teoria Copernicana, secondo la quale era la terra a girare intorno al sole e non viceversa. Questa posizione lo portò vicino alla scomunica e al rogo, evitato

grazie ad una sottile schermaglia retorica con l'Inquisizione, tesa a dimostrare che lui aveva riportato le teorie Copernicane per dovere di scienziato, senza condividerle. La meccanica di Galileo pose i fondamenti per le leggi di Newton, come lo stesso Newton avrebbe riconosciuto più tardi.

Messo alle strette fu costretto ad abiurare e condannato al carcere a vita, dopo breve tempo convertito negli arresti domiciliari. In questa fase della sua vita scrisse uno dei libri più importanti per la scienza del tempo, "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti la meccanica e i moti locali", nel quale sono espressi i principi fondamentali della cinematica e della resistenza dei materiali.

Santorio Santorio, professore di medicina all'Università di Padova e collega di Galileo, fu tra i primi ad applicare metodi quantitativi allo studio della fisiologia e alla medicina. Per trent'anni passò la maggior parte del tempo su una piattaforma sospesa, misurando i liquidi e i solidi in ingresso e in uscita dal suo organismo. Questi esperimenti sono la base degli studi moderni sul metabolismo.

William Harvey, cominciò i suoi studi a Cambridge per perfezionarsi in medicina all'Università di Padova. Influenzato dalla teoria Aristotelica del primato del cuore svolse studi profondi sulla circolazione corporea, arrivando a chiarire il funzionamento del sistema circolatorio. I suoi risultati furono pubblicati in latino nel libro *De motu cordis*. La vivisezione dei cani gli permise di osservare un cuore in movimento.

Capì ben presto che la fase di mandata della pompa cardiaca era la sistole, contrazione del cuore, e non la diastole, come sostenuto da Galeno. Osservando che la portata di sangue pompata dal cuore era superiore alla massa di sangue dell'organismo, dedusse che la portata in mandata doveva tornare al cuore attraverso una rete di vasi capillari. Può essere considerato il primo biomeccanico del cuore.

Cartesio (1596–1650) fu educato dai Gesuiti sui principi della meccanica e dell'astronomia di Galileo ed ebbe una profonda formazione matematica. Erede di una modesta fortuna trascorse la sua vita da soldato in Boemia, Ungheria e Olanda, dove si fermò, diventando tutore della regina Cristina di

Svezia. Gli si deve uno strumento di larghissimo impiego nella scienza e nella tecnica, il sistema di coordinate Cartesiane, ideato, si dice, mentre in letto osservava una mosca volare tra le travi del baldacchino. Descartes, questo il suo nome francese, fu uno degli autori della filosofia meccanica, secondo la quale ogni cambiamento nella natura è provocato dal movimento e dalla sistemazione di elementi materiali. Il suo approccio meccanico alla fisiologia ebbe grande fortuna tra gli studiosi del tempo. Nel trattato *L'homme*

8

1 Introduzione

(1664) espose i principi della meccanica applicati al corpo umano. Secondo la sua visione gli animali sono macchine in movimento governate dai sensi e dai riflessi, mentre l'uomo, pur considerato strutturalmente come una macchina, è distinto dagli animali perché dotato di un'anima.

Giovanni Borelli (1608–1679) nacque a Napoli da una famiglia sospettata di co-spirazione contro i reali di Spagna. Per evitare le persecuzioni si trasferì a Roma, dove fu profondamente influenzato dagli insegnamenti di Galileo, Harvey, Keplero, Santorio e Cartesio. I suoi interessi andavano dalla geometria alla fisiologia, all'astronomia e alla vulcanologia. Insegnò nelle Università di Messina, Pisa e Firenze.

Successe a Cartesio nel ruolo di tutore della regina Cristina di Svezia, che lo sostenne sempre con elargizioni annuali. Il suo trattato fondamentale, *De motu animalium*, lo colloca di diritto tra i padri nobili della biomeccanica. Nel testo Borelli descrive e analizza con metodi geometrici il movimento umano e quello degli animali nei vari tipi di movimento, salto, corsa, nuoto. Nella sua analisi del cammino impiegò i principi della filosofia meccanica, investigando il ruolo della contrazione muscolare nella generazione del movimento, la direzione delle fibre muscolari in relazione a quella della forza prodotta e la fisiologia del muscolo.

Isaac Newton (1643–1727) nacque a Woolsthorpe by Colsterworth, nel Lincoln-shire. Era figlio di agricoltori, ma come agricoltore fu pigro e distratto. Dopo studi discontinui entrò alla Kings School di Grantham. Nel

prepararsi per frequentare l'Università a Cambridge, lesse le opere di Galileo, Keplero, Cartesio. Fu ammesso al Trinity College a Cambridge, ma tornò a Woolsthorpe, suo luogo natale, per sfuggire alla peste. A casa iniziò esperimenti di ottica per comprendere la natura della luce e fu affascinato dalla meccanica. Si dice che la scoperta della legge di gravitazione sia dovuta alle osservazioni sulla caduta delle mele dagli alberi del suo giardino.

Newton si trovò ad operare all'interno di teorie scientifiche discordanti, in particolare quelle che riguardavano il moto dei corpi celesti e di quelli terrestri. Per Keplero il moto dei pianeti si svolgeva secondo orbite ellittiche, sotto l'azione di forze dirette radialmente, dal sole ai pianeti stessi. Per Galileo i pianeti seguivano traiettorie circolari e il loro movimento, continuo e perenne, non era prodotto da alcuna forza, come già Aristotele aveva postulato. Cartesio aveva formulato la sua legge d'inerzia, secondo la quale se ad un corpo non sono applicate forze esterne questo continua a muoversi di moto rettilineo uniforme. Ma questa legge sembrava valida soltanto sulla terra in quanto il moto dei pianeti la contraddiceva. Galileo aveva osservato che il moto libero dei gravi, in assenza di resistenze, non dipendeva dalla massa dei corpi e si svolgeva secondo una traiettoria rettilinea.

Tendenzialmente rettilineo era anche il moto di un corpo lanciato con una certa velocità iniziale, per quanto la traiettoria fosse influenzata dalla gravità.

Le soluzioni del "puzzle" furono quattro, semplici, diremmo oggi, leggi, le tre leggi della dinamica e la legge di gravitazione universale. Con questo Newton, possiamo forse dire, mise d'accordo il cielo e la terra, guardando il cielo con gli occhi guidati dalla ragione.

Newton sostenne in seguito di aver trovato la legge di gravitazione nel ricercare l'azione che equilibrava la forza centrifuga della luna. È più probabile, ma nessuno lo saprà mai, che la soluzione sia venuta dalle discussioni sull'argomento avute con

1.1 Cenni storici

altri scienziati, in particolare i colleghi della Royal Society Hooke, Halley, Wren e in Europa Huygens. Non sappiamo se la storia della mela caduta dall'albero come ispiratrice della legge di gravitazione, abbia un qualche fondamento.

Con i suoi risultati Newton evitò di accettare il meccanicismo Cartesiano, inammissibile per lui, fervido credente, in quanto non presupponeva necessariamente l'esistenza di un essere superiore, ordinatore dell'universo. A questo proposito conviene ricordare che oltre allo studio della meccanica, uno dei rami della "filosofia della natura", Newton coltivò, stranamente, gli studi biblici e l'alchimia. Era un convinto ariano, seguace cioè dell'eresia di Ario, secondo la quale il Cristo non possedeva natura divina. Da questo derivava il rifiuto del dogma della trinità. Egli non confessò mai, in vita, le sue convinzioni. Comprensibile, era Professor Emeritus al Trinity College!

I principi newtoniani permettono di interpretare e prevedere qualunque movimento nell'universo, in un campo di velocità sensibilmente lontane da quella della luce.

Newton formulò anche la legge di composizione delle forze, che portò alla comprensione dei meccanismi di generazione di forza in un complesso di diversi fasci muscolari. A distanza di oltre 250 anni dalla sua morte la meccanica che usiamo è ancora quella newtoniana. Al Trinity College Newton restò legato per tutta la vita, co-stellata da onori e riconoscimenti prestigiosi. Era un uomo scontroso e nevrotico che ebbe dispute accese con alcuni scienziati del suo tempo, famosa quella con Leibnitz per la paternità del calcolo infinitesimale, che Newton aveva elaborato, chiamando-lo "metodo delle flussioni", dieci anni prima di Leibnitz, ma pubblicando i risultati molto dopo. Ne nacque una disputa feroce in seno alla Royal Society. Una commissione appositamente nominata (e influenzata dallo stesso Newton) gli diede ragione, accusando Leibnitz di plagio. Oggi si tende a credere che la teoria sia stata sviluppata indipendentemente dai due scienziati, con Newton più rivolto agli aspetti fisici e meccanici, Leibnitz agli aspetti logico-matematici.

Rilevanti progressi furono poi compiuti in altri campi, ad esempio con la scoperta del microscopio e l'evoluzione dei metodi sperimentali. Si scoprì che il muscolo si contrae conservando inalterato il suo volume, che gli

stimoli responsabili della contrazione muscolare sono inviati dal cervello attraverso il sistema nervoso, si cominciò anche ad investigare la natura elettrochimica degli stimoli muscolari. Si giunse anche a una descrizione microscopica della struttura dell'osso, con fibre e lamine organiche e inorganiche disposte con regolarità intorno ad un sistema di canali.

La rivoluzione scientifica dovuta ai contributi di Galileo, Cartesio, Keplero e soprattutto Newton fu completamente assorbita e compresa nel secolo successivo, nel quale la “filosofia della natura” lasciò il posto a una nuova scienza della meccanica, basata sui paradigmi appena menzionati. Nacque una nuova figura di scienziato, legata all'osservazione sperimentale dei fenomeni e al pensiero razionale.

Nel '700 la discussione scientifica era centrata soprattutto sulle cause del movimento. Si discuteva se le forze fossero interne o esterne ai corpi. Cartesio negava l'esistenza di forze mutue tra i corpi, Newton postulava l'esistenza di forze agenti mutuamente tra corpi dotati di massa. La scienza si suddivise in diversi campi disciplinari, come si presenta oggi. Tre grandi figure dominarono la scena del tempo, Eulero, D'Alembert e Lagrange. Le leggi di Newton erano applicabili ai corpi mate-

10

1 Introduzione

riali puntiformi ed a quelli celesti, ma non permettevano di descrivere il moto di corpi estesi o fluidi e di analizzare la legge di vibrazione di un sistema con elementi elastici.

A questi problemi diedero risposta i fratelli Svizzeri Jacob e Johann Bernoulli, col nipote David Bernoulli e l'allievo di Johann, Leonhard Euler. Eulero è considerato a ragione uno dei più grandi matematici di tutti i tempi. Egli diede risposta al problema di prevedere il moto di corpi estesi e dei fluidi, mentre a Bernoulli dobbiamo il famoso principio di conservazione dell'energia per i fluidi che porta il suo nome.

Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) fu trovato appena nato sui gradini della chiesa di St. Jean le Rond, presso Notre Dame a Parigi. Era il frutto di

un amore ille-gittimo tra una marchesa e un generale. Preso in adozione dalla famiglia di un vetraio, studiò al Collegio Giansenista Mazarino filosofia, diritto e belle arti. Anche se il padre non lo riconobbe ufficialmente, seguì sempre discretamente la sua vita e alla sua morte gli lasciò un'annualità di 1200 libbre. Pur incoraggiato dai Giansenisti a intraprendere gli studi di teologia e la carriera ecclesiastica, si iscrisse alla scuola di legge, diventando avvocato nel 1738. In seguito i suoi interessi si volsero alla medicina e alla matematica. Nel 1743, due anni dopo il suo ingresso all'Accademia delle Scienze, pubblicò il suo *Traité de dynamique*, nel quale estese e rese sistematici i risultati di Newton. Il principio di d'Alembert, di larghissimo impiego nei problemi d'Ingegneria, riconduce la trattazione di un problema di dinamica ad un problema statico, grazie all'introduzione delle forze d'inerzia. Su invito di Diderot entrò nella direzione della *Encyclopedie*, assumendo la responsabilità delle sezioni sulla matematica e le scienze. Si occupò curiosamente anche di giochi, sviluppando il suo famoso metodo *martingala*, per vincere alla roulette.

Joseph Louis Lagrange (1736–1815) dimostrò, sin da giovanissimo, un grande interesse per la matematica, che studiò alla Scuola Reale d'Artiglieria. Nel 1766 rim-piazzò Eulero alla direzione dell'Accademia delle Scienze di Berlino. In seguito si trasferì a Parigi, dove diventò professore all'Ecole Polytechnique. Nel suo trattato *Mechanique Analytique* riprende i concetti della meccanica di Newton, partendo da quantità integrali, energia cinetica, energia potenziale, lavoro delle forze.

I fisiologi del XVIII secolo avevano adottato la scienza della meccanica per spiegare il funzionamento e la struttura del corpo umano. I progressi della chimica fornirono un nuovo e fertile approccio. Crebbe l'interesse per i processi di nutrizione, attivazione muscolare, metabolismo. La celebre asserzione "la forma di un organo segue la sua funzione" nacque in quel tempo. La scoperta dell'elettricità portò nuovo interesse sui processi elettrochimici di attivazione muscolare. Le teorie vitalistiche sfidarono quelle meccanicistiche di funzionamento del corpo umano. Numerosi fisiologi del tempo studiarono la natura e il meccanismo della contrazione muscolare, scoprendo che un muscolo poteva contrarsi sotto stimoli meccanici, elettrici e chimici. Passi avanti furono compiuti nella comprensione del meccanismo di trasmissione degli stimoli dal cervello ai muscoli. Nel 1741 apparve per la prima volta il termine

“ortopedico”. Nel 1750 Jallabert fu il primo a riattivare muscoli paralizzati mediante impulsi elettrici. Intorno alla fine del '700 Hunter produsse una completa descrizione delle funzioni muscolari.

Il XIX secolo vide fiorire l'interesse per l'analisi del movimento. Gli scritti di Jean Jacques Rousseau proponevano nuovi ideali di ritorno alla natura, nell'ambito

1.1 Cenni storici

11

di una nuova armonia tra l'uomo e l'ambiente. Lo sport e l'attività fisica non erano più, dopo la rivoluzione Francese appannaggio di una ristretta élite. Nel 1777 James Watt aveva inventato la macchina a vapore, mostrando al mondo la prospettiva di un lavoro affrancato dalla fatica fisica. L'analisi della locomozione, diventò una scienza, suscitando interesse nei matematici, fisiologi, ingegneri, organizzatori di spettacoli.

L'avvento della fotografia mise a disposizione uno strumento potentissimo di analisi sperimentale. I due fratelli Edward (1795–1881) e Wilhelm Weber (1804–1891) pubblicarono *Die Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge* in cui erano presentate 150 ipotesi sul cammino umano, derivate da osservazioni sperimentali e teoriche.

Molte ipotesi risultarono corrette, altre no, ma l'opera citata ebbe grande importanza per il progresso successivo dell'analisi della locomozione. Etienne Jules Marey fu il primo a trasformare l'analisi della locomozione da indagine qualitativa a quantitativa. La sua base operativa era al Parco dei Principi, dove oggi sono i campi da tennis del Roland Garros. Il centro aveva una pista circolare di 500 m, equipaggiata con gli strumenti più avanzati per l'analisi del movimento. I soggetti esaminati erano adulti, bambini, sportivi professionisti e dilettanti. Marey usava il mezzo cinematografico, riprendendo i suoi soggetti durante la corsa e il cammino e misurando con sensori pneumatici le forze scambiate col terreno. La prima piattaforma di forza può a buon diritto essergli attribuita. Per la prima volta era possibile ottenere, oltre ai dati cinematici ricavati dalla cinematografia,

dati sulle forze scambiate col terreno, sull'energia cinetica, su quella elastica e le traiettorie del baricentro del corridore. La ricca

“banca dati” di Marey acquistò nel tempo interesse in cardiologia, nella meccanica, nella musica, nell'Ingegneria Civile e nell'idrodinamica.

Edward Muybridge (1830–1904) iniziò la sua carriera nello studio della locomozione dietro sollecitazione di un appassionato di ippica, Leland Stanford. Stanford era convinto che durante il trotto per alcuni istanti tutte le quattro zampe del cavallo si sollevassero da terra. Marey aveva confermato questa intuizione con rilievi a bassa velocità, Muybridge fece altri rilievi a velocità sostenuta, confermando l'ipotesi. A differenza di Marey, Muybridge mancava di rigore scientifico e le sue osservazioni erano spesso poco precise, ma egli diede un contributo rilevante alla comprensione dell'importanza della fotografia per il rilievo di dati cinematici.

Nel 1891 Wilhelm Braune e Otto Fischer portarono a termine un'analisi tridimensionale del cammino. Per completare l'analisi era richiesta la posizione del baricentro e il momento d'inerzia di tutti i segmenti corporei. I due ricercatori ottennero questi dati sezionando due cadaveri. I dati ottenuti furono confrontati con quelli di cento soldati. Un soggetto avente una conformazione simile a quella dei cadaveri fu rive-stito con una tuta nera, sulla quale furono applicati sottili tubi luminosi. Le immagini durante il movimento furono poi sovrapposte a un sistema di riferimento, ripreso in seguito. Le analisi successive richiesero a Fischer (Braune era morto nel frattempo) numerosi anni. Indagini dello stesso tipo sono compiute oggi da un PC moderno in pochi secondi. I risultati furono pubblicati nel trattato *Der Gang des Menschen*.

Nell'Ottocento la biologia si differenziò in campi diversi. La teoria dell'evoluzione di Darwin aveva mostrato come le strutture biologiche evolvono, anche in relazione alla funzione svolta e alle sollecitazioni presenti. L'ingegneria cominciò a entrare pesantemente in questo tipo di analisi.

Le basi dell'elettromiografia furono poste da Du Bois Reymond e Duchenne nell'Ottocento. Gli esperimenti di Galvani avevano creato un enorme interesse sull'elettricità "animale". Fiorirono gli impostori, che promettevano di guarire tutti i mali dell'uomo usando correnti elettriche. In questo clima Du Bois Reymond fu il primo ad applicare degli elettrodi superficiali sulla pelle per misurare le tensioni e le correnti connesse all'attività muscolare. Nel 1886 Duchenne pubblicò *Physiologie des Mouvements*, in cui si descriveva l'azione di ogni muscolo superficiale dell'organismo.

Nasceva l'elettromiografia.

Grande interesse nacque anche per lo studio delle ossa come organi strutturali e della postura. Si comprese come una buona postura fosse necessaria per favorire un corretto flusso delle forze di massa dal corpo al terreno. Nel 1855 Breithaupt descrisse una serie di fratture dovute a tensioni eccessive nelle ossa, manifestatesi nelle reclute di fanteria in Prussia. Volkman descrisse la relazione tra stato di sforzo e crescita dell'osso. I principi della resistenza dei materiali furono applicati al materiale osseo. Si comprese anche che le fibre ossee si dispongono secondo le linee isostatiche (tangenti cioè alle tensioni principali). Wolff sintetizzò molti dei concetti precedenti nella legge che porta il suo nome. Si giunse alla conclusione che la crescita dell'osso era stimolata da fattori prevalentemente meccanici.

Quella del Novecento è storia solo di ieri. Le due guerre mondiali, lo sviluppo economico, l'accresciuto interesse per il mantenimento della salute e per la vita fisica, lo sviluppo tecnologico, portarono all'aumento esponenziale dei ricercatori e dei centri di ricerca impegnati nella biomeccanica. Nel 1920 Amar pubblicò *The Human Motor*, un'analisi dei fattori fisiologici e fisici del lavoro umano. Per la prima volta la biomeccanica si occupava dell'attività lavorativa, nell'intento di ottimizzare le prestazioni del lavoratore e ridurre la fatica. Si trattava di ricerche chiaramente stimolate dal processo d'industrializzazione dei paesi avanzati. Nicholas Bernstein, medico russo (1896-1966), si applicò alla psicofisiologia del lavoro, scomponendo moti complessi compiuti durante l'attività lavorativa in movimenti elementari, studiando la corretta postura del lavoratore nelle sue operazioni abituali e i movimenti di lavoro con utensili, includendo anche dati sulla corretta progettazione del posto di

lavoro. Tra i risultati di Bernstein la scoperta che gli adulti compiono, dal punto di vista energetico, movimenti più “economici” dei bambini. Erano i primi risultati di una nuova scienza, l’ergonomia.

A.V. Hill (1886–1977) iniziò la sua carriera a Cambridge come matematico, ma si convertì presto allo studio della fisiologia. Le sue ricerche furono centrate principalmente sulla meccanica e la fisiologia dei muscoli. A Hill dobbiamo il modello, familiare agli studenti di Biomeccanica di tutto il mondo, che assimila il muscolo a un sistema composto di tre elementi, due elastici (in serie e in parallelo) e un attuatore.

Hill derivò il suo modello da accurate (anche se oggi ne conosciamo i limiti) misure calorimetriche delle quantità di calore collegate al fenomeno della contrazione. Nel modello di Hill è presente il concetto che la potenza del muscolo è costante, a elevate velocità di contrazione corrispondono piccole forze, a velocità modeste grandi forze.

Per quanto superato da studi successivi, il modello di Hill rappresenta ancora oggi un utile strumento didattico.

1.1 Cenni storici

13

Rudolph Laban (1879–1958) sviluppò un metodo per rappresentare movimenti complessi, codificandoli secondo atti elementari. Il metodo di Laban è ancora usato nelle scuole di danza. Dopo essere fuggito dalla Germania nazista per approdare in Inghilterra, scoprì che il suo metodo si prestava alle applicazioni nel mondo del lavoro, per il miglioramento della produttività e per accrescere il benessere del lavoratore.

A.F. Huxley (1924–) si occupò soprattutto della contrazione muscolare. A lui dobbiamo la “sliding filament theory” (1953). Secondo questo modello i filamenti di actina e miosina scorrono gli uni sugli altri, producendo la contrazione muscolare.

Un successivo sviluppo della teoria, la “Cross Bridge Theory”, cercò di spiegare il meccanismo di connessione e interazione dei filamenti.

La biomeccanica è oggi una scienza affermata, con ricercatori e centri diffusi in tutto il mondo. I risultati della ricerca influenzano la medicina, il mondo del lavoro, lo sport, dove gioca un ruolo importante nello studio del gesto atletico e la progettazione dell'attrezzatura e dell'abbigliamento sportivo. È presente come disciplina in molti corsi di studio Universitari come quelli in Scienze motorie, in Bioingegneria e in Ortopedia. Numerose sono le riviste e le altre pubblicazioni scientifiche che trattano la materia, come pure i Convegni e i Seminari che in tutto il mondo favoriscono lo sviluppo della discussione scientifica. Per finire citiamo la più importante Associazione Scientifica, l'International Society of Biomechanics, ISB, fondata nel 1973.

 Image 6

2

Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

2.1 Piani e assi di riferimento per l'analisi biomeccanica

La Fig. 2.1 mostra i tre piani di riferimento impiegati nell'analisi statica, cinematica e dinamica del corpo umano. I due piani verticali prendono il nome rispettivamente di piano frontale e sagittale, mentre il piano trasversale è orizzontale. Il piano sagittale è di simmetria per il corpo umano, simmetria solo approssimativa in quanto, com'è noto, le due parti dell'organismo presentano differenze morfologiche notevoli. Le intersezioni dei tre piani menzionati individuano un sistema di assi Cartesiani, rispettivamente medio-laterale, antero-posteriore e longitudinale. L'origine del sistema di riferimento così definito è nel baricentro del corpo. Poiché il sistema di riferimento presentato e la nomenclatura connessa sono d'impiego comune nella medicina, a esso converrà riferirsi per stabilire una comunicazione scientifica in ambito multidisciplinare.

Y

Asse

longitudinale

Piano sagittale

Asse medio

laterale Z

Piano trasversale

X

Piano frontale

Asse postero

anteriore

Fig. 2.1. Piani ed assi di riferimento in bio-
meccanica

Picasso B.: Fondamenti di Meccanica e Biomeccanica. Meccanica dei corpi rigidi articolati.

DOI 10.1007/978-88-470-2333-8_2, © Springer-Verlag Italia 2013

16

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

2.2 Gradi di libertà per un sistema articolato

Le analisi statiche, cinematiche e dinamiche che svolgeremo partono dall'assunzione fondamentale che il corpo umano possa essere assimilato a un sistema multi-body, costituito cioè da corpi rigidi collegati tra loro dalle articolazioni, assimilabili a vincoli ideali. Partendo dall'analisi di un segmento generico, si definisce grado di libertà un movimento elementare che il corpo può compiere, sia questo una traslazione o una rotazione. Il numero di gradi di libertà che un corpo rigido possiede è uguale al numero di parametri indipendenti necessari per definirne la posizione e la giacitura nel piano o nello spazio. Nel caso di un corpo mobile nel piano i gradi di

libertà sono tre, due traslazioni nella direzione degli assi coordinati e una rotazione intorno ad un asse normale al piano del moto.

Qualunque spostamento da una posizione iniziale ad una finale potrà essere scomposto in una successione di spostamenti elementari secondo i gradi di libertà descritti.

È facile vedere che, per un corpo libero di muoversi nel piano, tre parametri indipendenti sono sufficienti per definirne la posizione, ad esempio le coordinate x_G , y_G del baricentro e l'angolo di rotazione intorno ad un asse Z baricentrico. Le possibilità di movimento di un corpo possono essere limitate o cancellate mediante vincoli, che legano il corpo ad altri corpi o ad una base fissa. Convenzionalmente, nel piano, un vincolo che sopprime soltanto una delle traslazioni prende il nome di appoggio semplice, un vincolo che sopprime le traslazioni e permette solo la rotazione si chiama cerniera o giunto rotoideale, mentre il vincolo che sopprime tutti i gradi di libertà ancorando il corpo ad un sistema fisso o ad un altro corpo, prende il nome di incastro.

Se un corpo è vincolato ad una base fissa mediante un numero di vincoli strettamente sufficiente ad eliminare i suoi gradi di libertà, esso è in equilibrio *isostatico*, se il numero dei vincoli è sovrabbondante l'equilibrio è *iperstatico*, se il numero dei vincoli è insufficiente ad assicurare la cancellazione di tutti i gradi di libertà l'equilibrio è *labile*, ovvero il corpo ha ancora qualche grado di mobilità. In qualche caso, come nella Fig. 2.2g il sistema resta labile malgrado i vincoli siano sufficienti. Si intuisce infatti che il corpo conserva la possibilità di traslare orizzontalmente. Nella Fig. 2.2f viene mostrato un caso di equilibrio iperstatico. Infatti per cancellare tutte le possibilità di movimento del corpo sarebbe sufficiente un solo incastro, invece dei due presenti. È interessante notare che, se il corpo dovesse subire delle dilatazioni termiche, ne sarebbe impedito dai vincoli e svilupperebbe quindi uno stato di tensione interna che potrebbe portare anche alla rottura in qualche punto del corpo. Il corpo della Fig. 2.2e è invece in equilibrio isostatico ed ha la possibilità di dilatarsi liberamente, per la presenza dell'appoggio semplice che permette lo scorrimento orizzontale.

Un sistema di più corpi indipendenti, mobili nel piano, possiede un numero di gradi di libertà pari alla somma dei gradi di libertà di ogni singolo corpo,

cioè $3 * n$, con n numero dei corpi. Se, ad esempio abbiamo due corpi indipendenti e vogliamo vincolare completamente il sistema, possiamo pensare di vincolare ciascuno dei corpi alla base con un incastro, Fig. 2.2h,1. Se invece pensiamo di collegare i due corpi con un vincolo d'incastro che abolisca le possibilità di moto relativo, il sistema dei due corpi diventerà un corpo unico e conserverà ancora tre gradi di libertà Fig. 2.2h,2. Per cancellare tutte le possibilità di movimento occorrerà quindi vincolare uno dei due

 Image 7

2.2 Gradi di libertà per un sistema articolato

17

Fig. 2.2. Gradi di libertà e vincoli per uno o più corpi rigidi nel piano: a) un corpo libero nel piano con 3 g.d.l.; b) appoggiato (restano 2 g.d.l.); c) incernierato (1 g.d.l.); d) incastrato (0 g.d.l., corpo isostatico); e) un corpo isostatico; f) un corpo iperstatico (vincoli sovrabbondanti); g) il corpo è labile malgrado i tre appoggi; h) diverse alternative per vincolare isostaticamente un sistema di due corpi

corpi alla base. Un'altra possibilità si ottiene vincolando i due corpi alla base con due cerniere e vincolando tra loro i due corpi, ancora con una cerniera, Fig. 2.2h,3.

Da quanto detto deriva che le posizioni e il tipo di vincoli necessari per cancellare le possibilità di movimento di un sistema costituito da più corpi sono molteplici.

Un corpo libero nello spazio possiede sei gradi di libertà, riconducibili alle tre traslazioni nella direzione degli assi coordinati X , Y , Z e a tre rotazioni 0 , 1 , 2 intorno a questi. Anche in questo caso per definire univocamente la posizione del corpo nello spazio sono necessari sei parametri indipendenti, ad esempio le coordinate del baricentro e tre rotazioni intorno agli assi coordinati. Una difficoltà nella definizione della posizione mediante tre traslazioni e tre rotazioni nasce dal fatto che se ruotiamo un corpo rispetto agli assi coordinati Cartesiani passanti per il baricentro, la giacitura finale

dipende dalla sequenza di rotazioni scelta. Per definire univocamente la posi-

 Image 8

 Image 9

 Image 10

 Image 11

 Image 12

 Image 13

 Image 14

 Image 15

 Image 16

 Image 17

 Image 18

 Image 19

 Image 20

 Image 21

 Image 22

 Image 23

18

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

zione del corpo mediante tre traslazioni e tre rotazioni è necessario specificare una sequenza definita, ad esempio una delle sequenze di angoli di Eulero. Se un sistema è composto da n corpi indipendenti nello spazio, il numero di gradi di libertà complessivo è pari a $6 * n$. Se invece esistono dei vincoli che limitano le possibilità di movimento relative, esso sarà inferiore. Il numero di gradi di libertà che un vincolo sottrae al sistema dipende dal tipo di vincolo e dal numero dei corpi che fanno capo al vincolo stesso. Le articolazioni del nostro corpo sono un esempio di vincoli, anche se solo in prima approssimazione possiamo ricondurre il loro funzionamento a quello di un vincolo ideale.

Descriveremo i vincoli secondo il numero e la tipologia dei movimenti elementari che impediscono nel moto relativo. Se un sistema è composto da più corpi, il numero totale di gradi di libertà è pari alla somma dei movimenti elementari dei due corpi considerati rigidamente uniti e di quelli possibili nel moto relativo.

2.3 Giunti piani e giunti spaziali

Giunti piani

Intendiamo per giunti o vincoli piani quelli che collegano due corpi dotati di moto piano. Per classificarli useremo il linguaggio della meccanica.

Giunto rotoidale

Il giunto rotoidale piano permette soltanto la rotazione mutua degli organi che collega, togliendo due gradi di libertà al moto relativo dei due corpi. Se, prima di essere collegati, i corpi avevano ciascuno tre gradi di libertà, complessivamente sei, dopo la rotazione saranno ancora possibili le due traslazioni e la rotazione del complesso dei due corpi collegati, più la rotazione relativa. Sono assimilabili a un giunto rotoidale piano l'articolazione del gomito, tra omero e ulna e tra radio e ulna. In anatomia queste prendono il nome rispettivamente di *ginglino angolare o troclea* e di *ginglino laterale o trocoide*.

a) b) c) d) **Fig. 2.3.** Giunti piani: a) appoggio semplice; b) giunto rotoidale piano; c) incastro; d) giunto prismatico

2.3 Giunti piani e giunti spaziali

19

Incastro

L'incastro unisce due corpi, sopprimendo qualunque possibilità di moto relativo. Per presentare un esempio tratto dal mondo della meccanica si può ricordare la saldatura che produce l'unione dei due corpi, facendone un corpo unico. Al corpo composito così formato restano tre gradi di libertà, due spostamenti e una rotazione. L'incastro cancella quindi tre gradi di libertà.

Appoggio semplice

L'appoggio semplice permette ai due corpi di conservare un movimento di rotazione ed uno di traslazione relativa. Cancella quindi soltanto un grado di libertà, dei sei complessivi che i due corpi possedevano prima di essere collegati.

Giunto prismatico

Il giunto prismatico sopprime due gradi di libertà nel moto piano, in quanto consente soltanto lo scorrimento relativo dei due corpi, impedendo la rotazione e l'altra traslazione. Le articolazioni del corpo umano si allontanano notevolmente da questi modelli ideali la cui utilità risiede soprattutto nelle semplificazioni che introducono nel problema analizzato.

Per terminare l'enumerazione precedente presentiamo una semplice formula che permette di calcolare il numero dei gradi di libertà Z_p di un sistema articolato con vincoli ideali nel piano

$$Z_p = 3 * n - 3 * i - 2 * \sum (n - 1) * c (n - 1) * a$$

i

c_i

$i - \sum_i a_i$

i

(2.3.1)

con:

Z_p = numero dei gradi di libertà del sistema nel piano;

n

= numero dei corpi che compongono il sistema;

i

= numero degli incastri;

c

= numero delle cerniere (giunti rotoidali);

a

= numero degli appoggi semplici;

n_{ci} = numero dei corpi che concorrono sulla cerniera i-esima;


n_{ai} = numero dei corpi che concorrono sull'appoggio i-esimo.

Esempio 2.1. Si consideri il modello di arto inferiore rappresentato nella Fig. 2.4. Si suppone che il moto della gamba sia piano e che questa sia composta da tre sezioni, la coscia, la gamba e il piede, trascurando il fatto che quest'ultimo sia a sua volta un sistema dotato di numerose articolazioni. Supponiamo che il bacino sia fermo, quindi immobilizzato con un vincolo di incastro, rappresentato in figura con un tratteggio lineare. I corpi rigidi sono quattro le cerniere piane tre, non vi sono appoggi. Su ogni cerniera insistono soltanto due corpi. Si ha quindi:

$$Z_p = 3 * 4 - 1 * 3 - 2 * 1 * 3 = 3 .$$

(2.3.2)

Resta il problema di scegliere le tre coordinate che definiscono la posizione del sistema. Un semplice esame della figura mostra che la scelta più semplice e naturale,

 Image 24

20

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

Fig. 2.4. Modello piano semplificato della gamba

anche se naturalmente non l'unica possibile, è quella degli angoli θ_1 , θ_2 , θ_3 formati da ogni segmento con quello precedente. L'individuazione di questi angoli è possibile soltanto se a ogni segmento si associa un sistema di coordinate, a esso solidale.

Questa scelta si rivela valida se i movimenti di ciascuna sezione rispetto a quella precedente sono delle rotazioni pure, cioè se tutti i vincoli sono assimilabili a cerniere piane. Nel caso della gamba il modello presentato è di primissima approssimazione. L'assunzione di moto piano non è verificata nella realtà, perché l'articolazione coxo-femorale si comporta con buona approssimazione come un giunto sferico che permette alla coscia rotazioni intorno a tre assi ortogonali. L'articolazione del ginocchio è un giunto sinoviale nel quale i condili poggiano su alloggi corrispondenti del piatto tibiale. La rotazione del femore rispetto alla tibia non avviene rispetto a un asse fisso, come in una cerniera ideale. Infatti, i condili sono collegati al piatto tibiale dai legamenti crociati anteriore e posteriore. Come si vedrà nel seguito, l'asse di rotazione cambia durante il movimento. Un'ulteriore funzione di guida hanno i menischi, cuscinetti di cartilagine che contribuiscono a formare gli alloggiamenti dei due condili. È poi presente anche un'altra coppia di legamenti, quelli collaterali, con la funzione di garantire la stabilità dell'articolazione nel piano frontale.

La terza articolazione è quella della caviglia, nella quale l'astragalo s'impegna all'interno di una "forcina" formata da tibia e perone. Rimandiamo all'anatomia per una completa descrizione morfologica. In

questo caso possiamo dire comunque che l'articolazione si comporta con discreta approssimazione come un giunto rotoideale.

Definiti i tre parametri che individuano la posizione angolare relativa di ciascun segmento rispetto a quelli contigui, si pone il problema di determinare posizione e orientamento di ciascun segmento rispetto a un qualunque sistema di riferimento. Vedremo nel seguito che, trattandosi di un corpo esteso, non puntiforme, la posizione può essere determinata con riferimento ad un punto caratteristico, ad esempio il baricentro.

L'orientamento può invece essere definito soltanto apponendo un sistema di riferimento solidale al corpo e trovando le relazioni angolari tra gli assi del sistema solidale al corpo e quelli del sistema fisso o quelli dei corpi contigui.

 Image 25

22

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

quindi 4 gradi di libertà dei 12 originari. Il sistema complessivo dei due corpi mantiene quindi otto gradi di libertà. Non esistono strutture articolari simili ad un giunto cilindrico nel corpo umano.

Appoggio piano

È frequente il caso che un corpo sia vincolato con un suo punto a scorrere su un piano. In questo caso nel moto relativo i due corpi conservano cinque gradi di libertà, due spostamenti e tre rotazioni. Il complesso dei due corpi collegati mantiene quindi 11 gradi di libertà.

Incastro spaziale

Blocca completamente il movimento relativo dei due corpi che collega. Il sistema dei due corpi mantiene sei gradi di libertà complessivi. Considerare due corpi legati da un incastro spaziale o considerarli come parti di un corpo unico è del tutto equivalente.

In analogia a quanto già visto per i sistemi piani, il numero dei gradi di libertà in un sistema spaziale è dato dall'espressione.

$$Z_s = 6 * n - 6 * i - 5 * (n_p - 1) * p - 4 * (n_c - 1) * c - 3 * (n_s - 1) * s - (n_a - 1) * a .$$

(2.3.3)

In cui:

Z_s = numero dei gradi di libertà spaziali del sistema;

n

= numero dei corpi da cui il sistema è composto;

i

= numero degli incastri spaziali;

p

= numero dei giunti prismatici;

c

= numero dei giunti cilindrici;

s

= numero dei giunti sferici;

a

= numero degli appoggi piani;

n_p = numero corpi concorrenti in un giunto prismatico;

n_c = numero corpi concorrenti in un giunto cilindrico;

n_s = numero corpi concorrenti in un giunto sferico;

n_a = numero corpi concorrenti in un appoggio piano.

La morfologia delle nostre articolazioni è in genere alquanto più complessa dei modelli ideali presentati. A ciascun segmento scheletrico afferiscono muscoli, tendini, nervi, vasi, tessuti connettivi e altre strutture biologiche. La nostra ipotesi, che ciascun segmento scheletrico con le sue pertinenze, sia assimilabile a un corpo rigido e mantenga la sua forma inalterata durante varie situazioni di carico e movimento, è quindi di prima approssimazione.

La scelta del numero di sezioni o corpi da considerare in un modello biomeccanico del corpo umano dipende dagli scopi dell'analisi e dal grado di approssimazione desiderato nella descrizione del movimento. In qualche caso la scelta è semplificata dall'anatomia, ad esempio nella suddivisione in sezioni degli arti, che è intuitiva, in altri è più complessa e artificiosa, come nel caso del tronco.

Per avere un'idea dell'effettiva complessità si osservi l'articolazione tra due vertebre. I piccoli movimenti relativi di traslazione nella direzione dell'asse della co-

 Image 26

2.4 Descrizione di posizioni e giaciture rispetto a un sistema Cartesiano 23

Fig. 2.6. Struttura di una articolazione inter-

vertebrale

lonna, di rotazione intorno a questo (torsione della colonna) e di rotazione intorno ai due assi trasversali sono permessi dalle deformazioni del disco intervertebrale, una struttura complessa “a cuscino” con fibre di collagene dirette secondo l'asse della vertebra per resistere ai carichi assiali. In prossimità delle superfici articolari superiore e inferiore, le fibre cambiano direzione per assumere un andamento tangenziale, formando delle caratteristiche arcate che si prestano bene a resistere ai carichi esterni. La resistenza allo schiacciamento viene dall'effetto di contenimento del nucleo polposo, ingrandito in Fig. 2.6, da parte del “annulus fibrosus” che si comporta in modo analogo alla carcassa di un pneumatico. La struttura costituita da due vertebre sovrapposte con il disco interposto è stabilizzata dai legamenti posti in parallelo. In prima approssimazione si può assimilare

l'articolazione a un giunto sferico, tenendo presente che sono possibili anche modesti spostamenti assiali.

2.4 Descrizione di posizioni e giaciture rispetto a un sistema Cartesiano

In un riferimento Cartesiano la posizione di un punto nello spazio è descritta dal vettore che ha per componenti le coordinate, espresso in forma algebrica da una matrice colonna. Poiché nel trattare sistemi complessi è necessario usare diversi sistemi di riferimento, sarà spesso utile introdurre, nella descrizione del vettore posizione, un indice relativo al sistema di riferimento. $\{ \}$

$\{ p_x \}$

$$A^P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} .$$

(2.4.1)

p_z

Il vettore colonna nella (2.4.1) rappresenta quindi la posizione del punto P rispetto al sistema di riferimento [A]. Le componenti del vettore sono le lunghezze delle proiezioni sugli assi coordinati del vettore posizione del punto P. Altre rappresentazioni della posizione di un punto rispetto a diversi sistemi di coordinate, possono trovarsi in Appendice.

24

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

P

Z

A rP

k

O

j
Y
i
X

Fig. 2.7. Rappresentazione di una posizione

Rappresentazione di orientamenti

Se la rappresentazione di una posizione è ottenuta attraverso un vettore 3×1 , la rappresentazione dell'orientamento di un corpo richiede, come si è detto, che si affigga ad esso un sistema di riferimento solidale e si definisca quindi l'orientamento di questo rispetto a un altro riferimento. Ammettendo che due sistemi abbiano l'origine in comune, un metodo per descrivere la giacitura del sistema [B], solidale al corpo, rispetto al sistema [A] è quello di descrivere l'orientamento dei versori degli assi di

[B] rispetto ad [A]. Indichiamo i versori di [B] con i_B, j_B, k_B . Se specifichiamo che questi versori sono espressi rispetto ad [A], dovremo indicarli come Ai_B, Aj_B, Ak_B . È

conveniente disporre le componenti dei tre versori come colonne di una matrice 3×3 , *matrice di rotazione* di [B] rispetto ad [A], A

B R. La matrice di rotazione è quindi data

dalla relazione:

[
]

$a_{11} \ a_{12} \ a_{13}$

A

|

|

$$B \mathbf{R} = [A_i B, A_j B, A_k B] = [a_{21} \ a_{22} \ a_{23}] .$$

(2.4.2)

a₃₁ a₃₂ a₃₃

Possiamo sostituire ai termini a_{ij} espressioni esplicite, ricordando che le componenti di un vettore sono le lunghezze delle proiezioni del vettore sugli assi del sistema di riferimento. Poiché i versori hanno modulo unitario, le proiezioni sono date dal prodotto scalare dei due versori interessati. Notando che il simbolo \circ rappresenta il prodotto scalare, si ha:

[

][

]

a₁₁ a₁₂ a₁₃

$$i_B \circ i_A \ j_B \circ i_A \ k_B \circ i_A \ A$$

|

||

|

$$B \mathbf{R} = [A_i B, A_j B, A_k B] = [a_{21} \ a_{22} \ a_{23}] = [i_B \circ j_A \ j_B \circ j_A \ k_B \circ j_A] .$$

(2.4.3)

a₃₁ a₃₂ a₃₃

$\mathbf{i}_B \circ \mathbf{k}_A \quad \mathbf{j}_B \circ \mathbf{k}_A \quad \mathbf{k}_B \circ \mathbf{k}_A$ Quella scritta a destra nell'espressione precedente è la matrice dei coseni direttori del sistema [B] rispetto ad [A]. Un elemento generico della matrice $\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{R}$ sarà $a_{ij} =$

$\cos(\theta_{ij})$, con $i, j = 1, 2, 3$ che si riferiscono rispettivamente al versore fisso e mobile.

Ad esempio $a_{21} = \cos \angle(\mathbf{j}_A \mathbf{i}_B)$. Un'osservazione attenta della matrice mostra che le sue tre colonne rappresentano i versori di [B] espressi rispetto a [A], mentre le sue righe sono i versori di [A] espressi rispetto a [B]. Si ha quindi:

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]$$

$\mathbf{B} \mathbf{i}_A$

A

$\left| \mathbf{B} \right|$

$\mathbf{B} \mathbf{R} = [\mathbf{A} \mathbf{i}_B, \mathbf{A} \mathbf{j}_B, \mathbf{A} \mathbf{k}_B] = \left[\mathbf{j}_T$

A $\right]$.

(2.4.4)

$\mathbf{B} \mathbf{k}_A$

2.4 Descrizione di posizioni e giaciture rispetto a un sistema Cartesiano 25

La descrizione di [A] rispetto a [B] è la trasposta della descrizione di [B] rispetto ad [A]:

B

$\mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{A}$

$B R^T$.

(2.4.5)

Ricordando le proprietà delle matrici ortonormali (vedi richiami in Appendice), sappiamo che l'inversa di una matrice di rotazione è eguale alla sua trasposta. Si ha, infatti:

[

]

$A_i^T B$

A

| A

|

A

A

$B R^T A$

$B R = [$

j^T

$B] [A_i B \ j B \ k B] = I_3$.

(2.4.6)

$A_k^T B$

Essendo I_3 la matrice unitaria. Quindi:

A

$$\mathbf{B} \mathbf{R} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{R} - 1 = \mathbf{B}$$

$\mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{T}$

.

(2.4.7)

Descrizione di un sistema di riferimento solidale a un corpo mobile

Nei problemi di cinematica è necessario descrivere contemporaneamente la posizione di un corpo, attraverso quella di un suo punto, ad esempio il baricentro, e l'orientamento. È utile mettere insieme queste informazioni in un'unica matrice, che contenga sia la posizione dell'origine del sistema, coincidente con un punto notevole del corpo, sia la matrice orientamento 3×3 . Ad esempio la terna mobile [B] sarà rappresentata, rispetto al sistema [A], dall'espressione seguente:

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{R} , \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{O} \mathbf{R} \mathbf{G}] .$$

(2.4.8)

Dove A

$\mathbf{B} \mathbf{R}$, $\mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{O} \mathbf{R} \mathbf{G}$ sono rispettivamente la matrice che rappresenta l'orientamento di

[B] e la posizione dell'origine di [B] rispetto alla terna fissa [A]. Nella Fig. 2.8 si hanno due terne mobili, [A],[B] ed una terna fissa [G]. La loro rappresentazione grafica è compiuta tracciando i tre versori degli assi concorrenti nell'origine. La Fig. 2.8

mostra che la terna [A] è riferita a [G], mentre la terna [B] è riferita a [A]. Il vettore i_B

k

B

[B]

jB

AP

BORG

j

j

A

[G]

k

G

G

k

A

i

A

GP

AORG

j

[A]

Fig. 2.8. Terne di riferimento

B

26

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

che unisce le origini di due terne rappresenta la posizione dell'origine di una delle terne (quella che corrisponde alla punta della freccia rispetto all'altra (quella la cui origine è sulla coda della freccia). Il verso della freccia indica ad esempio che la posizione della terna [A] è nota rispetto a [G] e non viceversa. La matrice di un sistema di riferimento unisce la rappresentazione di posizione e orientamento. Una traslazione può essere rappresentata ponendo per l'orientamento la matrice unitaria, mentre il semplice orientamento relativo di due sistemi con l'origine in comune può essere ottenuto ponendo come vettore posizione un vettore nullo.

Cambiamento del sistema di riferimento

Si desideri cambiare il riferimento di posizione e orientamento di un corpo o di un punto. Si abbia ad esempio un punto la cui posizione rispetto al riferimento [B] sia \mathbf{BP} . Vogliamo esprimere la posizione del punto rispetto a un altro riferimento [A], quando [B] sia semplicemente traslato rispetto a [A], cioè abbia gli assi ordinatamente paralleli a quelli di [A] e l'origine traslata della quantità \mathbf{APBORG} . In questo caso la posizione di \mathbf{P} rispetto ad [A] si ottiene semplicemente sommando il vettore posizione di \mathbf{P} rispetto a [B] con la traslazione del sistema [B] rispetto ad [A]. Si ha cioè: $\mathbf{AP} = \mathbf{BP} + \mathbf{APBORG}$.

(2.4.9)

Si noti che l'operazione di somma di due vettori riferiti a due terne diverse non è normalmente lecita, salvo che, come in questo caso, le due terne siano mutuamente traslate. Conviene notare che la posizione del punto nello spazio non cambia. Cambia soltanto la sua rappresentazione, che è riferita non più a [B], ma a [A]. In quest'operazione, che chiamiamo mappatura, le uniche informazioni necessarie per cambiare il riferimento sono il vettore traslazione dei due sistemi e il fatto che gli assi rimangano paralleli.

Mappatura tra riferimenti ruotati

Nei paragrafi precedenti abbiamo mostrato come l'orientamento di un riferimento rispetto a un altro può essere descritto da una matrice di rotazione 3×3 , avente come termini i coseni direttori. Nel caso di due riferimenti [A] e [B] come quelli della B P

k

B

A P

j

B

k

A

A P

j

BORG

i

B

A

i

A

Fig. 2.9. Riferimenti traslati

k

k

A

B

B P j A

i

B

j

B

Fig. 2.10. Riferimenti ruotati

i

A

Fig. 2.10, la matrice di rotazione sarà indicata come A

B **R.** Ricordiamo che le colonne

della matrice rappresentano i versori di [B] espressi rispetto a [A], le righe, i versori di [A] espressi rispetto a [B]:

[

]

B i T A

A

| B |

$$\mathbf{B} \mathbf{R} = [A_i^B, A_j^B, A_k^B] = \begin{bmatrix} j^T \\ \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

(2.4.10)

$\mathbf{B} \mathbf{k}^T \mathbf{A}$

Il nostro problema è di passare dalla rappresentazione di un vettore rispetto a un riferimento, nel nostro caso [B], a quella rispetto a un altro riferimento [A]. Per calcolare $\mathbf{A} \mathbf{P}$, dato $\mathbf{B} \mathbf{P}$, osserviamo che le sue componenti rispetto a [A] sono le lunghezze delle proiezioni di $\mathbf{B} \mathbf{P}$ sugli assi coordinati di [A], date dal prodotto scalare di $\mathbf{B} \mathbf{P}$ per i versori di [A]. Si ha quindi:

$$A_{px} = B_i^A \circ B \mathbf{P}$$

$$A_{py} = B_j \circ B$$

A

\mathbf{P}

(2.4.11)

$$A_{pz} = B_k^A \circ B \mathbf{P}$$

dove \circ indica il prodotto scalare.

Per esprimere la relazione precedente come prodotto matriciale osserviamo che B_i^A B_j^A B_k^A sono le righe di A

A \mathbf{j}^T \mathbf{k}^T sono le righe di A

$\mathbf{B} \mathbf{R}$, per cui la (2.4.11) si può scrivere in forma compatta come:

$$\mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbf{P}.$$

(2.4.12)

La relazione scritta risolve il problema della mappatura dello stesso vettore tra sistemi di riferimento ruotati ma con la stessa origine. Si noti la potenza della notazione.

I pedici a sinistra di un'entità replicano gli apici a sinistra dell'entità successiva.

Mappatura per sistemi di riferimento ruotati e traslati

Spesso conosciamo la descrizione di un vettore rispetto a un riferimento [B] e vorremmo conoscere la descrizione rispetto a un altro riferimento [A], traslato e ruotato rispetto al primo. Il vettore posizione dell'origine di [B] rispetto a [A] viene chiamato \mathbf{APBORG} , mentre la matrice che descrive l'orientamento di [B] rispetto ad [A] sia \mathbf{ABR} .

Procediamo in due fasi, mappando prima il vettore \mathbf{BP} tra [B] e un sistema ausiliario con la stessa origine di [B] e gli assi ordinatamente paralleli a [A]. Per questo si impiegherà la (2.4.12). Il secondo passo prevede la mappatura tra il sistema ausiliario

28

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

k

B

\mathbf{BP}_j

B

AP

k

A

AP

j BORG

A

i

B

i

A

Fig. 2.11. Terne ruotate e traslate

e [A], semplicemente traslato rispetto al primo. S'impiegherà la (2.4.9). Le due fasi descritte sono rappresentate dalla relazione:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{ABRBP} + \mathbf{APBORG} .$$

(2.4.13)

La (2.4.13) descrive un'operazione generale di mappatura di un vettore tra due riferimenti mutuamente traslati e ruotati. Il secondo membro della (2.4.13) rappresenta la somma di due vettori, ambedue espressi nel riferimento [A]. È comunque preferibile scrivere la trasformazione precedente come un prodotto matriciale nella forma: $\mathbf{AP} = \mathbf{ABTBP}$.

(2.4.14)

Per ottenere la matrice di trasformazione A

B T dobbiamo considerare la mappatura

come un operatore matriciale che moltiplicato per un vettore espresso rispetto a un riferimento [B] dia lo stesso vettore espresso rispetto al sistema [A]. È facile vedere che questo ha la forma:

AP

A

B

= **BR APBORG**

P

.

(2.4.15)

1

0 0 0

1

1

Per svolgere le operazioni algebriche scritte nell'espressione precedente, dobbiamo quindi introdurre una matrice di trasformazione 4×4 e dei vettori posizione in coordinate omogenee 4×1 . Una riga $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ viene inserita come ultima nella matrice di trasformazione. L'espressione (2.4.15) corrisponde alle relazioni: $\mathbf{AP} = \mathbf{ABRBP} + \mathbf{APBORG}$.

(2.4.16)

$1 = 1$

La matrice così definita prende il nome di trasformata omogenea. È da notare che, anche se le trasformate omogenee forniscono una forma compatta ed elegante per la relazione tra due riferimenti, raramente sono usate nei programmi di calcolo per evitare di compiere una serie di operazioni inutili. È opportuno notare che, pur avendo introdotto le trasformate omogenee nel contesto della mappatura di un vettore su due diversi riferimenti, esse possono anche essere usate per descrivere dei riferimenti. Per esempio la descrizione del riferimento $[B]$ rispetto a $[A]$ è A

B T.

2.5 Operatori: traslazioni, rotazioni e trasformazioni 29

^

Z

A

A

A

P

P

1

^

Y

2

A

AP

1

Q

A

^

X

A

Fig. 2.12. Traslazione di un punto

2.5 Operatori: traslazioni, rotazioni e trasformazioni

Una traslazione di un punto nello spazio è rappresentata da un vettore. Sia la vecchia che la nuova posizione del punto siano riferite allo stesso sistema. È facile vedere che lo spostamento di un punto è rappresentato dalla stessa procedura usata per descrivere la traslazione di due riferimenti. Si consideri che se un punto viene spostato

“avanti” rispetto a un certo riferimento, si ha lo stesso risultato dello spostamento “indietro” nella stessa misura, del sistema di riferimento. La matematica usata nei due casi è identica. Soltanto il nostro punto di vista è diverso. La Fig. 2.12 mostra come a un punto, rappresentato dal vettore posizione $AP1$, sia impresso uno spostamento rappresentato da un altro vettore AQ . In questo caso il vettore AQ è tutto quello che dobbiamo conoscere per compiere la traslazione. Il risultato è un nuovo vettore $AP2$

dato dall'espressione:

$$AP2 = AP1 + AQ .$$

(2.5.1)

Per scrivere l'operazione come un prodotto matriciale scriveremo: $AP2 = DQ(q)AP1 .$

(2.5.2)

La matrice $DQ(q)$ può essere scritta come una trasformata omogenea nella forma:

[
|

1 0 0 qx

| 0 1 0 q |

D

|

y |

$$Q(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & q \end{bmatrix}$$

(2.5.3)

z

0 0 0

1

in cui q_x q_y q_z sono le componenti del vettore di traslazione. L'equazione (2.5.2) implementa le stesse operazioni matematiche della (2.4.9), relativa alla mappatura di un vettore tra due sistemi traslati.

Operatori di rotazione

Una matrice di rotazione può essere pensata oltre che una relazione di mappatura, un operatore di rotazione all'interno di un unico sistema di riferimento. Ad esempio un vettore **AP1** a cui sia applicato un operatore **R** è ruotato nel modo specificato dall'operatore stesso. La nuova posizione del vettore avrà ad esempio il nome **AP2**. In questo caso l'operatore **R** non ha indici di riferimento perché l'operazione di rotazione ha luogo all'interno di un unico sistema di riferimento.

30

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

Z

Z'

α

Y'

α

Y

X=X'

Fig. 2.13. Rotazione intorno a X

La matrice che ruota un vettore in un certo modo è la stessa matrice che descrive un riferimento ruotato nello stesso modo rispetto a un riferimento fisso.

Talvolta in un operatore di rotazione compare un indice che si riferisce all'asse rispetto al quale la rotazione è compiuta. Ad esempio:

$$\mathbf{P2} = \mathbf{RK(H)}\mathbf{P1} .$$

(2.5.4)

Nell'equazione precedente $\mathbf{RK(H)}$ è l'operatore che ruota il vettore $\mathbf{P1}$ dell'angolo H

intorno all'asse \hat{x}

K. L'operatore può essere scritto come una trasformata omogenea, con la parte riservata al vettore posizione fatta di termini nulli. Si cerchi ad esempio la matrice che esprime una rotazione intorno all'asse X di un angolo θ . Osservando la Fig. 2.13 e ricordando il significato delle colonne della matrice di rotazione, si ottiene:

[

]

1

0

0

0

| 0 c0 - s0 0 |

R

|

|

x , 0 = [0 s0 c0 0] .

(2.5.5)

0

0

0

1

Analogamente per rotazioni intorno a Y dell'angolo 1 e a Z di 2

[

]

c1

0

s1 0

| 0

1

0

0 |

R

|

|

$$y, 1 = \begin{bmatrix} -s_1 & 0 & c_1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.5.6)

0

0

0

1

[

]

cy

- s₂ 0 0

| s₂ c₂ 0 0 |

R

|

|

$$z, 2 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

0

1

0] .

(2.5.7)

0

0

0

1

1

Esempio 2.2. Si voglia ruotare il vettore $\mathbf{P} = 1$

di 30° intorno a Z. L'operatore

1

di rotazione avrà la forma, usando le abbreviazioni C e S per il coseno e il seno dell'angolo rispettivamente:

[

]

C30

- S30 0

R

[

]

Z, 30 =

S30

C 30

0

.

0

0

1

2.5 Operatori: traslazioni, rotazioni e trasformazioni 31

Il vettore dopo la rotazione sarà dato dalla relazione:

[

][] [

]

0,87 - 0,5

0

{ 1 } { 0,37 }

P = [0,5

0,87 0] [1] = [1,37] .

0

0

1

1

1

Operatori di rototraslazione

Anche in questo caso una matrice di trasformazione omogenea **T** può essere impiegata sia per mappare due terne di riferimento traslate e ruotate, sia per far compiere una rototraslazione a un vettore. La matrice **T** non avrà in questo caso indici anteriori perché l'operatore agisce all'interno di un solo sistema di riferimento. Ad esempio: **P2 = TP1** .

(2.5.8)

Ancora una volta la procedura matematica è identica a quella necessaria per mappare un vettore da un riferimento a un altro, ruotato e traslato rispetto al primo. In conclusione:

*Un operatore che ruota secondo **R** un vettore e lo trasla secondo un altro vettore **Q** è dato dalla trasformata che mette in relazione un sistema di riferimento ruotato secondo **R** e traslato secondo **Q** rispetto a un sistema fisso.*

[]
|
{ 1 |
{

Esempio 2.3. Si desideri ruotare il vettore

1

P1=

intorno a X di 30° , quindi lo si

|

{1|

]

0,5

1

voglia traslare secondo il vettore $\mathbf{Q} = 0,5$. L'operatore cercato ha la forma:

0

1

[

]

1

0

0

0,5

| 0 0,87 - 0,5 0,5 |

$\mathbf{T} =$ |

[

|

0

0,5

0,87

0

]

0

0

0

1

il vettore ruotato e traslato è

[

]

]

1

0

0

0,5

|1| |1,5|

|

|

} |

↳ |

}

|

}

0

0,87 - 0,5 0,5 | 1

0,87

P

|

|

2 = L

=

.

0

0,5

0,87

0

]]

|

[1|

|

J |
|
{1, 34 |
|
J
0
0
0
1
1
1
Y
Q
P
2
X
P

Fig. 2.14. Rototraslazione di un vettore

1

32

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

Esempio 2.4. Si desidera ruotare il vettore

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

di 30° rispetto a Z e traslarlo di

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

{ 1 |

|

}

1

Q =

.

|

|

[0 |

|

]

1

La matrice di rototraslazione è:

[

0,87 - 0,5 0 1

| 0,5 0,87 0 1 |

T = |

[

|

0

0

1

0] .

0

0

0

1

Il risultato è

[

] [

] [

]

0,87 - 0,501

|0,5| |1,43|

|

|

}

|

{ |

}

|

{

0,5

0,87

0

1 |

0

1,25

P

|

|

$2 = T * P1 = [$

=

.

0

0

1

0] |

|

{ 0 |

|
 J |
 |
 { 0 |
 |
 J
 0
 0
 0
 1
 1
 1

La rappresentazione grafica della rototraslazione è mostrata nella Fig. 2.14.

Riassumiamo le diverse funzioni di una matrice di rototraslazione **T**:

- può rappresentare un riferimento [B] rispetto a un altro [A]. In questo caso la sottomatrice **R** della matrice **T** (prime tre righe e tre colonne) rappresenta l'orientamento, l'ultimo vettore (ultima colonna) rappresenta la posizione dell'origine di

[B] rispetto ad [A];

-

può mettere in relazione (mappatura) due riferimenti [B] e [A] per esprimere rispetto a [A] un vettore inizialmente definito rispetto a [B];

•

può servire come operatore per ruotare e traslare un vettore nello spazio Cartesiano (con un unico sistema di riferimento).

Nel seguito useremo il termine trasformata (o trasformazione), nell'impiego di una matrice di rototraslazione.

Trasformazioni composte

Con riferimento alla Fig. 2.15, è noto il vettore \mathbf{CP} e si desidera invece \mathbf{AP} . Il riferimento [C] è riferito a [B], mentre [B] è riferito ad [A]. Abbiamo allora: $\mathbf{BP} = \mathbf{BCTCP}$

(2.5.9)

2.5 Operatori: traslazioni, rotazioni e trasformazioni 33

k

B

[B]

j

B

k

A

P

B

CORG

[A]

A

[C]

P

BORG

i

C

j

j

A

i

C

k

B

A

C

P

C P

Fig. 2.15. Terne ruo-

i

A

tate e traslate

e anche:

$$A\mathbf{P} = AB\mathbf{T}B\mathbf{P} .$$

(2.5.10)

Unendo le due relazioni precedenti si ottiene:

$$A\mathbf{P} = AB\mathbf{T}B\mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{C}\mathbf{P} .$$

(2.5.11)

Inversa di una matrice di trasformazione

Data la matrice A

B \mathbf{T} che mette in relazione i sistemi di coordinate [B] e [A] si vuole trovare B

A \mathbf{T} . Osservando che la matrice A

B \mathbf{T} è composta di una sottomatrice 3×3 A

B \mathbf{R}

che rappresenta l'orientamento angolare di [B] rispetto ad [A] e nella quarta colonna da un vettore $A\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{O}\mathbf{R}\mathbf{G}$ che rappresenta la posizione dell'origine di B rispetto ad A si ha:

A

$$B \mathbf{T} = [A$$

$$B \mathbf{R} , A\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{O}\mathbf{R}\mathbf{G}] .$$

(2.5.12)

Per l'orientamento si ha, come sappiamo, B

$$A\mathbf{R} = A$$

$$B\mathbf{R} - 1 = A$$

B \mathbf{R}_T mentre la posizione

dell'origine di [A] rispetto a [B] si ottiene esprimendo rispetto a [B] il vettore nullo, che rappresenta l'origine di [B]. Ricordando la (2.4.13) si ha:
 $B(\mathbf{A}P\mathbf{B}O\mathbf{R}G) = B\mathbf{A}\mathbf{R} * \mathbf{A}P\mathbf{B}O\mathbf{R}G + B\mathbf{P}\mathbf{A}O\mathbf{R}G = 0$.

(2.5.13)

Poiché il primo membro è un vettore nullo, si ha:

$$B\mathbf{P}\mathbf{A}O\mathbf{R}G = - B\mathbf{A}\mathbf{R} * \mathbf{A}P\mathbf{B}O\mathbf{R}G .$$

(2.5.14)

B

$$A\mathbf{T} = [A$$

$$B\mathbf{R}_T, - A$$

$$B\mathbf{R}_T\mathbf{A}P\mathbf{B}O\mathbf{R}G] .$$

(2.5.15)

34

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

2.6 Numero di parametri minimo per rappresentare un'orientazione

Sino ad ora abbiamo usato le matrici \mathbf{R} dei coseni direttori per rappresentare l'orientazione di un riferimento rispetto a un altro. I coseni direttori sono

nove. È strettamente necessario un numero così alto di parametri per descrivere un'orientazione? La risposta è no. Poiché il modulo di un versore è unitario, risulta che la somma dei quadrati dei termini di ciascuna colonna nella matrice \mathbf{R} , è eguale all'unità. Abbiamo quindi:

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij}^2 = 1 \quad i = 1, \dots, 3.$$

(2.6.1)

$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$

Osserviamo anche che i vettori \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} sono mutuamente ortogonali, quindi il prodotto scalare di due qualunque di essi è nullo. Si ha quindi:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

o anche

3

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik}a_{jk} = 0 \quad \text{per } i, j = 1, \dots, 3 \text{ e } i \neq j.$$

(2.6.2)

$k=1$

Da quanto precede, si trae che il numero di parametri indipendenti necessari per definire la posizione del sistema mobile rispetto a quello fisso è pari a tre. Infatti, i nove coseni direttori sono legati dalle sei relazioni (2.6.1), (2.6.2). Una prova indiretta si avrà quando vedremo che un generico orientamento può essere definito mediante una sequenza di tre rotazioni intorno a tre assi coordinati, fissi o mobili. Le possibili sequenze sono dodici per gli assi fissi e dodici per gli assi mobili. In quest'ultimo caso le rotazioni prendono il nome di angoli di Eulero. Per passare dalla matrice dei coseni direttori alle tre rotazioni equivalenti s'impiega la formula di Cayley per le matrici ortonormali:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{S})^{-1}(\mathbf{I}_3 + \mathbf{S}).$$

(2.6.3)

La relazione precedente è soddisfatta da una matrice antisimmetrica del tipo:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -sz & sy \\ sz & 0 & -sx \\ -sy & sx & 0 \end{bmatrix}$$

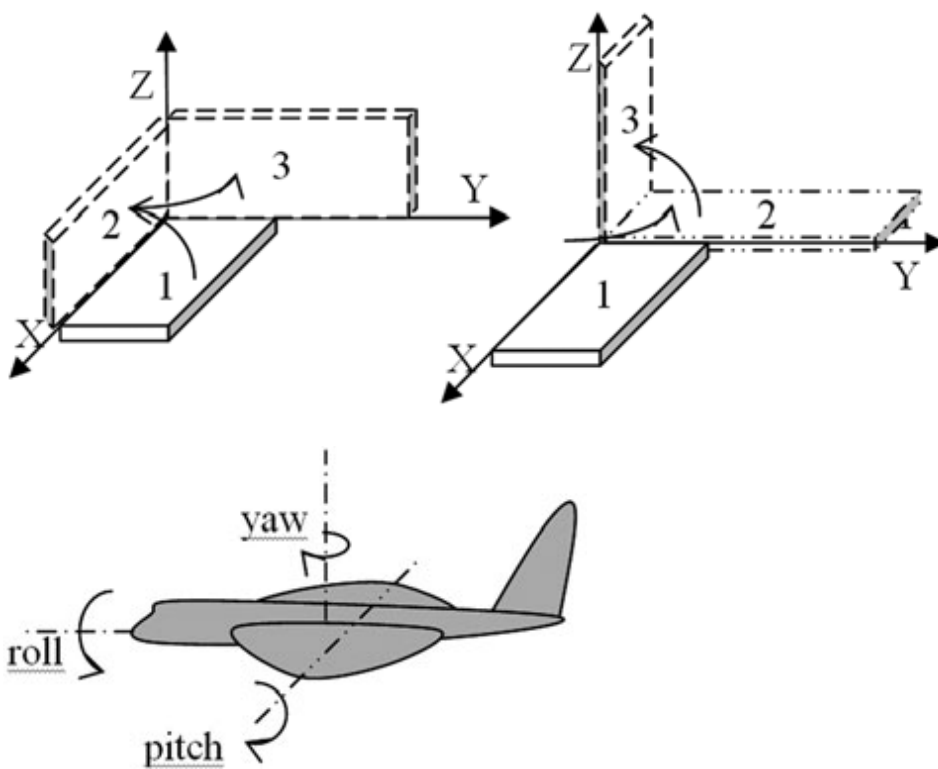
(2.6.4)

$$\begin{bmatrix} -sy \\ sx \\ 0 \end{bmatrix}$$

La prima conseguenza della (2.6.3) è che una matrice di rotazione può essere espressa in funzione di soli tre parametri. È necessario quindi, per rappresentare in modo economico un'orientazione, trovare al posto della matrice \mathbf{R} una sequenza di tre rotazioni intorno agli assi che producano lo stesso risultato. La difficoltà nasce dal fatto che, mentre è semplice rappresentare nello spazio Cartesiano delle traslazioni, in quanto, qualunque

sia l'ordine in cui sono applicate, il risultato non cambia, per le rotazioni questo non è vero. Si consideri ad esempio una tavoletta disposta inizialmente sul piano X–Y, sottoposta a due distinte sequenze di rotazioni, la prima composta da una rotazione positiva intorno ad X di 90° seguita da una, sempre positiva, intorno a Z di 90° , la seconda sequenza invertendo la prima.

La Fig. 2.16 mostra chiaramente che il risultato finale è diverso. Da un punto di vista matematico l'inversione dell'ordine dei fattori in un prodotto matriciale cambia



2.6 Numero di parametri minimo per rappresentare un'orientazione 35

Fig. 2.16. Non permutabilità delle sequenze di rotazione

il risultato. Mentre lo spostamento di un punto da una posizione iniziale a una posizione finale può essere rappresentato da un vettore, le cui

componenti si ottengono per proiezione sugli assi coordinati, non è possibile rappresentare una rotazione finita con un vettore avente come componenti le rotazioni elementari intorno agli assi, che hanno concorso a generare la rotazione complessiva. Usare la matrice \mathbf{R} o una sequenza di rotazioni è una scelta che dipende dal problema in esame. Se dobbiamo ruotare un vettore, e usiamo \mathbf{R} come operatore, la procedura implica un semplice prodotto di una matrice per un vettore e l'uso di una matrice di rotazione è sempre preferibile. Se invece dobbiamo specificare l'orientazione di un corpo nello spazio, è certamente complicato ricavare la matrice \mathbf{R} corrispondente, per cui è preferibile ricorrere a una sequenza di tre rotazioni.

Sequenze di rotazione intorno ad assi fissi

La scelta della sequenza di rotazioni e dei relativi assi porta alla definizione di ventiquattro possibili sequenze, dodici rispetto ad assi fissi e dodici rispetto ad assi mobili, tenendo presente che nella sequenza un'asse può comparire due volte.

Le dodici sequenze rispetto ad assi fissi o mobili sono:

X , Y , Z; X , Z , Y; X , Y , X; X , Z , X; Y , X , Z; Y , Z , X; Y , X , Y; Y , Z , Y; Z , X , Y; Z , Y , X; Z , X , Z; Z , Y , Z .

Consideriamo una sequenza intorno ad assi fissi, la prima rotazione intorno all'asse X, la seconda intorno all'asse Y, la terza intorno a Z. La matrice di rotazione potrà essere facilmente ottenuta ricordando che per rotazioni intorno ad assi fissi X, dell'angolo **Fig. 2.17**. Rotazioni intorno ad assi fissi

36

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

0, Y, di 1, Z di 2 si ha:

$\mathbf{R}_{X, 0, Y, 1, Z, 2} = \mathbf{R}_{Z, 2} \mathbf{R}_{Y, 1} \mathbf{R}_{X, 0}$

[

∏

∏

∏

$c_2 - s_2 0$

c_1

0

s_1

1

0

0

= |

L

|

s_2

c_2

0] L

0

1

0] L 0

$c_0 - s_0]$

0

0

1

- s1 0 c1

0

s0

c0

[

]

c2c1 , (s0s1c2 - c0s2) (s2s0 + c2s1c0)

= |

L

|

s2c1

(c0c2 + s0s1s2) (c0s1s2 - s0c2)] .

(2.6.5)

- s1

s0c1

c0c1

La trasformazione inversa, cioè il passaggio dalla matrice di rotazione agli angoli roll-pitch-yaw è data dalle formule, ricavabili da un semplice

ispezione della matrice precedente:

$$\alpha_1 = \text{Atan2}(-a_{31}, a_{21} + a_{22})$$

α_1

α_2

$$\alpha_2 = \text{Atan2}(a_{32}, a_{33})$$

.

(2.6.6)

$$\alpha_1 / c_1, \alpha_2 / c_1$$

$$\alpha_0 = \text{Atan2}(a_{32} / c_1, a_{33} / c_1)$$

La soluzione presentata non è unica in quanto una seconda soluzione può essere trovata assumendo il segno negativo per la radice nell'espressione di α_1 . Assumendo il segno positivo, le soluzioni calcolate per α_1 saranno sempre comprese tra -90°

e $+90^\circ$. Se $\alpha_1 = 90^\circ$, assumendo $\alpha_2 = 0$, si ha:

$$\alpha_1 = 90^\circ \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_0 = \text{Atan2}(a_{12}, a_{22})$$

Se $\alpha_1 = -90^\circ$;

$$\alpha_1 = -90^\circ \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_0 = -\text{Atan2}(a_{12}, a_{22})$$

La funzione atan2 , facilmente rintracciabile in qualunque libreria di routine scientifiche, calcola il valore della tangente partendo da due argomenti (proporzionali al seno e al coseno dell'angolo).

La matrice complessiva ottenuta dipende dall'ordine delle rotazioni. Se la successione non fosse quella descritta, il risultato cambierebbe. *Perché nel prodotto matriciale della (2.6.5) le matrici sono moltiplicate in ordine inverso rispetto a quello delle rotazioni?* Supponiamo di avere due sistemi di riferimento, uno fisso ed uno mobile, inizialmente coincidenti.

Applichiamo al sistema mobile una rotazione intorno all'asse X del sistema fisso, di α . Il sistema ruotato sarà ora rappresentato dalla matrice $\mathbf{R}_X(\alpha)$. Se ora applichiamo al sistema mobile una nuova rotazione intorno a Y di β , il sistema ruotato sarà rappresentato dal prodotto della nuova rotazione per quella precedente, cioè $\mathbf{R}_Y(\beta) \mathbf{R}_X(\alpha)$. Se infine applichiamo la terza rotazione, intorno a Z di γ , otteniamo il risultato della (2.6.5), cioè il prodotto matriciale va computato in ordine inverso rispetto alla sequenza di rotazioni. La conclusione precedente è valida se gli assi rispetto ai quali sono compiute le rotazioni sono gli assi del sistema fisso. *Se invece una o più rotazioni fossero compiute intorno agli assi del sistema ruotato?* Supponiamo ancora che due sistemi siano inizialmente coincidenti e uno

2.6 Numero di parametri minimo per rappresentare un'orientazione 37

dei due subisca una prima rotazione dell'angolo α intorno all'asse Z comune, seguita da una seconda rotazione di β intorno all'asse X ruotato. Possiamo pensare di svolgere questa sequenza di rotazioni operando prima la rotazione intorno a Z di α , riportando il sistema nella posizione iniziale con una rotazione intorno a Z di $-\alpha$

compiendo quindi la rotazione intorno all'asse X, coincidente con X di β e ruotando di nuovo il sistema intorno all'asse Z di α . In questo caso tutte le rotazioni sono relative ad assi fissi e comportano quindi premoltiplicazione. La sequenza sarebbe quindi rappresentata dal prodotto di matrici:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_Z(\alpha) * \mathbf{R}_X(\beta) * \mathbf{R}_Z(-\alpha) = \mathbf{R}_Z(\alpha) * \mathbf{R}_X(\beta)$$

(2.6.7)

Perché il prodotto di due rotazioni intorno allo stesso asse di angoli uguali ma opposti in segno fornisce la matrice identità. La sequenza appare quindi come una postmoltiplicazione delle due matrici.

Angoli di Eulero Z -Y -X

Un'altra possibilità per descrivere la posizione angolare del sistema mobile rispetto al fisso è la seguente.

Z, 2, Y, 1, X, 0 = [s2

c2

0]

0

1

0

0

c0 - s0

0

0

1

- s1 0 c1

0

s0

c0

[

]

c2c1 (s0s1c2 - c0s2) (s2s0 + c2s1c0)

= |

L

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & c_2 & & \\ & s_2 c_1 & (c_0 c_2 + s_0 s_1 s_2) & (c_0 s_1 s_2 - s_0 c_2) \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

(2.6.8)

$$-s_1$$

$$s_0 c_1$$

$$c_0 c_1$$

Si ottiene la stessa matrice ottenuta con tre rotazioni identiche rispetto ad assi fissi, ma compiute in ordine inverso.

La proprietà di non permutabilità delle rotazioni successive può essere facilmente dimostrata considerando la successione rispetto ad assi fissi di una rotazione intorno a X di θ seguita da una intorno a Z di ϕ . È facile vedere che la matrice complessiva di rotazione è:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & c_2 - s_2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & c_2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{z2, x0} = \mathbf{R}_{x, 0} * \mathbf{R}_{z, 2} = \begin{bmatrix} 0 & c_0 - s_0 \\ \end{bmatrix} s_2$$

c_2

$0 \]$

0

s_0

c_0

0

0

1

$[$

$]$

c_2

$- s_2$

0

$= |$

$[$

$|$

$s_2 c_0 \ c_2 c_0 - s_0 \]$.

(2.6.9)

$s_2 s_0$

$c_2 s_0$

c_0

 Image 30

38

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

Se invertiamo l'ordine delle rotazioni, otteniamo:

[

]

]

$c_2 - s_2 0$

1

0

0

|

||

|

$R_{X,0}; Z,2 = R_{Z,2} * R_{X,0} = \begin{bmatrix} s_2$

c_2

$0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c_0 - s_0 \end{bmatrix}$

0

0

1

0

s0

c0

[

]

c2 - s2c0

s2s0

= |

L

|

s2

c2c0

- c2s0] .

(2.6.10)

0

s0

c0

In ambito biomeccanico, si utilizza la sequenza che impiega gli angoli di Cardano/

Bryant secondo Grood&Suntay, sequenza che prevede:

-

una rotazione di 0 attorno all'asse Z del sistema di riferimento fisso (all'inizio coincidente con l'asse Z' del sistema mobile);

-

una rotazione di 1 attorno all'asse X' del sistema di riferimento mobile, dopo che la prima rotazione è stata eseguita;

-

una rotazione di 2 attorno all'asse Y' del sistema di riferimento mobile, dopo che le prime due rotazioni sono state eseguite.

La convenzione Cardanica di Grood&Suntay è una buona rappresentazione per la cinematica articolare perché gli assi di rotazione corrispondono agli assi articolari e il gimbal-lock, fenomeno di singolarità che si verifica per angoli $1 = k > / 2$, può essere quindi evitato. Si lascia al lettore la derivazione della matrice relativa, la cui sequenza è **RZ** , 0 **RX** , 1 **RY** , 2.

Rotazione rispetto a un asse generico

Quando il sistema di riferimento mobile ruota di un angolo finito H intorno ad un generico asse **k**, per definire la rotazione bastano quattro parametri, il valore dell'angolo H e le tre componenti del vettore **k**. Se il vettore **k** ha modulo unitario due componenti e l'angolo H potrebbero bastare. La rappresentazione più comune di una rotazione intorno ad un asse generico si ha utilizzando le tre componenti di **k**, moltiplicate per il valore dell'angolo H. In questo modo tre parametri sono sufficienti per rappresentare una rotazione finita. Mostriamo ora come si passa da una rappresentazione asse-angolo a una matrice di rotazione **R** tradizionale. Con riferimento alla Fig. 2.18, si operano alcune rotazioni tendenti a far coincidere l'asse **k** con uno degli assi coordinati.

S'inizia a ruotare il vettore \mathbf{k} intorno all'asse Z sino a quando giaccia sul piano X-Z. La rotazione richiesta è L (negativo perché si tratta di una rotazione in senso orario) intorno a Z, osservando che:

$$\cos L = k_x$$

$$\sin L = k_y$$

$$k_{xy}$$

$$k_{xy}$$

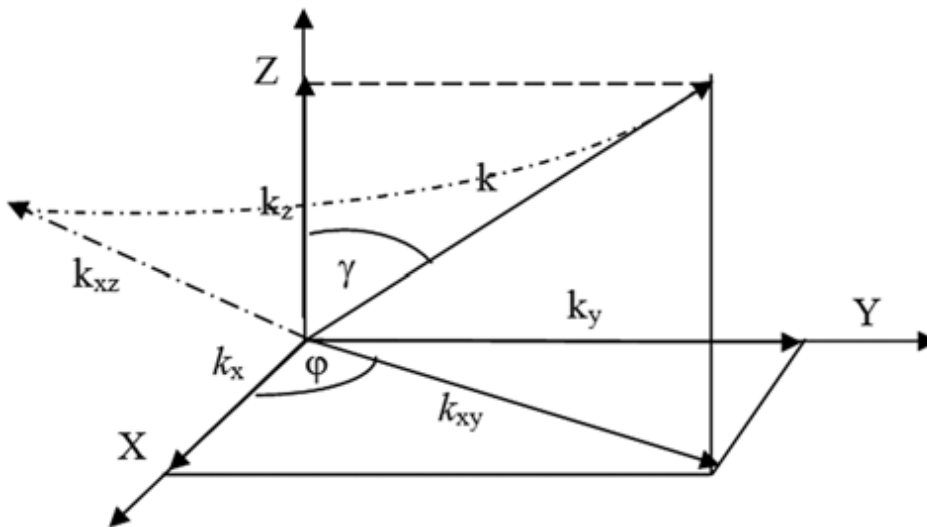
con

$$k_{xy} =$$

$$(k_x^2 +)$$

x

$$k_y^2$$



2.6 Numero di parametri minimo per rappresentare un'orientazione 39

Fig. 2.18. Rotazione finita

rispetto a un asse generico

e ricordando che \mathbf{k} è un vettore unitario. La matrice di rotazione corrispondente è:

[

] [

]

cC

sC 0

k

|

||

x / kxy

ky / kxy

0 |

$$\mathbf{RZ}, C = \begin{bmatrix} -sC & cC & 0 \\ -ky/kxy & kx/kxy & 0 \end{bmatrix}.$$

(2.6.11)

0

0

1

0

0

1

Avendo portato con la sequenza di rotazioni precedenti l'asse \mathbf{k} a coincidere con Z

si compia ora una rotazione di H intorno all'asse fisso Z . La corrispondente matrice di rotazione è:

$$\begin{bmatrix} cH & -sH & 0 \\ sH & cH & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.6.13)

0

0

1

Si riporti ora l'asse \mathbf{k} nella sua posizione originaria con una rotazione intorno a Y

dell'angolo $-\alpha$, che compenserà quella precedente di α , e una rotazione intorno a Z di $-\beta$ che compensa quella opposta precedente. Con l'intera successione di rotazioni abbiamo portato l'asse \mathbf{k} a coincidere con uno degli assi coordinati, nel nostro caso Z , operando la rotazione H e quindi riportandolo nella posizione primitiva. La matrice della rotazione

complessiva si ottiene moltiplicando le varie matrici elementari indicate prima, ricordando che si tratta di rotazioni intorno ad assi fissi, quindi è

40

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

necessario premoltiplicare, ottenendo:

$$\mathbf{R}_k, \mathbf{H} = \mathbf{R}_Z, -C * \mathbf{R}_Y, -2 * \mathbf{R}_k, \mathbf{H} * \mathbf{R}_Y, 2 * \mathbf{R}_Z, C =$$

[

]]

]]

]

k_x / k_{xy}

$-k_y / k_{xy} \ 0$

k_z

0

k_{xy}

$c_H - s_H \ 0$

= |

[

]]

]]

|

ky / kxy

kx / kxy

0]]

0

1

0]] sH

cH

0]

0

0

1

- kxy 0 kz

0

0

1

[

]]

]]

kz

0

- kxy

kx / kxy

ky / kxy

0

[0

1

0

|| - k

]

y / kxy

kx / kxy

0

=

kxy

0

kz

0

0

1

[

$\left[\begin{array}{c} \end{array} \right]$

$$k^2_{xv} + c$$

$$k_{xy} - k_{zs} \quad k_{xz} + k_{ys}$$

 $= \left[\begin{array}{c} \end{array} \right]$ $\left[\begin{array}{c} \end{array} \right]$ $\left[\begin{array}{c} \end{array} \right]$

$$k_{xy} + k_{zs}$$

$$k^2_{yv} + c$$

$$k_{yz} - k_{xs} \quad \left] \right]$$

(2.6.14)

$$k_{xz} - k_{ys} \quad k_{yz} + k_{xs}$$

$$k^2_{zv} + c$$

con $v = 1 - \cos H$ $c = \cos H$ $s = \sin H$.

La relazione scritta permette di passare dalla rappresentazione asse-angolo di una rotazione, costituita da uno pseudo vettore avente nelle prime tre posizioni le componenti del versore che rappresenta l'asse di rotazione e nell'ultima il valore della rotazione,

 $\left[\begin{array}{c} \end{array} \right]$ $\left[\begin{array}{c} \end{array} \right]$ $\left[\begin{array}{c} \end{array} \right]$ $\left\{ \begin{array}{c} k_x \end{array} \right\}$

|

}

ky

,

|

|

{kz |

|

H J

alla rappresentazione secondo una matrice di rotazione. Non è difficile scrivere le relazioni che permettono il passaggio inverso, dalla rappresentazione secondo una matrice di rotazione alla rappresentazione asse-angolo.

Rotazione infinitesima intorno ad un asse generico

Si supponga ora che la rotazione $H = \theta H$ sia infinitesima, per cui si possa assumere che $\cos \theta \sim 1 - \frac{1}{2} \theta^2$ e $\sin \theta \sim \theta$. La matrice precedente, dopo le opportune semplificazioni diventa:

[

] [

]]

1

- k

|

z!H

ky!H

1

-!zH !yH

L

|

k

L

J

z!H

1

kxsH J =

!zH

1

!xH

(2.6.15)

- k

-!

y!H

$kx!H$

1

yH

$!xH$

1

è facile vedere che la matrice precedente è antisimmetrica. Le quantità che vi compaiono sono le componenti sui tre assi Cartesiani della rotazione elementare !H. Se con-x

sideriamo un punto P, la cui posizione iniziale è rappresentata dal vettore **OP**
= y , z

2.6 Numero di parametri minimo per rappresentare un'orientazione 41

dopo la rotazione il punto si troverà in una nuova posizione:

[

] []

1

-!

| x |

|

zH

$!yH$ | } }

OP = [!zH

1

δx_H

.

$|y|$

(2.6.16)

$-\delta$

δ

y_H

δx_H

1

z

Lo spostamento infinitesimo del punto P dovuto alla rotazione è: $\delta \mathbf{P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP} - \mathbf{OP} \times \boldsymbol{\omega}$

[

$\delta x_H \delta y_H \delta z_H$

1

$-\delta z_H \delta y_H$

δx_H

δy_H

δx_H

δy_H

= |

[!

|

zH

1

!xH] |y| - |y|

-!

[] []

yH

!xH

1

z

z

([

] [

] \ []

1

-!zH !yH

1

0

0

|

{x|

{

=|

\|

[!

||

||

zH

1

!xH] - [0 1 0] / |y|

-!

{ }

yH

!xH

1

0

0

1

z

Γ

Γ Γ Γ Γ

Γ Γ Γ

0

-!zH !yH |

{x |

! |

{!xH |

! |

{x |

!

= |

[!

|

zH

0

!xH]

=

×

.

$$|y| \quad |!yH| \quad |y|$$

(2.6.17)

-!

{ } {

} { }

yH

!xH

0

z

!zH

z

Se ora supponiamo che la rotazione infinitesima !H avvenga in un intervallo infinitesimo !t, si ha:

[

] [] [] []

!]

| |x| |F| |x|

!

{ xH /!t } { } { } x { } { }

P

$$\mathbf{v}_P = \lim$$

$$= !$$

$$\times \mathbf{y} = F$$

$$\times \mathbf{y}$$

$$(2.6.18)$$

$$!$$

$$\mathbf{y}_H / !t$$

$$\mathbf{y}$$

$$t \rightarrow 0 !t$$

$$|$$

$$\lfloor$$

$$| | | | | | |$$

$$!$$

$$\rfloor \rfloor \rfloor \rfloor$$

$$z_H / !t$$

$$z$$

$$Fz$$

$$z$$

nella rotazione infinitesima intorno ad un asse qualunque si definisce la velocità angolare come un vettore diretto secondo l'asse di rotazione e di modulo pari a $dH = F$.

dt

Le componenti del vettore **F** sugli assi coordinati si ottengono per proiezione, come di consueto.

Sequenza di rotazioni infinitesime intorno ai tre assi

Consideriamo due sistemi di riferimento Cartesiani, inizialmente coincidenti, e ruotiamo uno dei sistemi prima intorno all'asse X del sistema fisso dell'angolo 0, poi intorno all'asse Y fisso dell'angolo 1, infine intorno all'asse Z fisso dell'angolo 2.

La matrice di rotazione complessiva risulta dal prodotto delle matrici elementari di

42

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

rotazione, cioè:

$$\mathbf{R}_{0, 1, 2} = \mathbf{R}_z, 2 * \mathbf{R}_Y, 1 * \mathbf{R}_X, 0$$

[

]]

]]

]

$c_2 - s_2 \ 0$

c_1

0

s_1

1

0

0

= [s2

c2

0]]

0

1

0]] 0

c0 - s0]

0

0

1

- s1 0 c1

0

s0

c0

[

]

c1c2

s0s1c2 - c0s2

$$s_0 s_2 + c_0 s_1 c_2$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 s_2$$

$$c_0 c_2 + s_0 s_1 s_2$$

$$c_0 s_1 s_2 - s_0 c_2 \end{bmatrix}.$$

(2.6.19)

$$- s_1$$

$$s_0 c_1$$

$$c_0 c_1$$

Se si cambiasse l'ordine delle rotazioni il risultato sarebbe diverso.

Supponiamo ora che le rotazioni applicate siano infinitesime, quindi si possa assumere: $c_0 = c_1 = c_2 = 1$

$$s_0 = \theta_0$$

$$s_1 = \theta_1$$

$$s_2 = \theta_2$$

in cui le lettere c e s rappresentano le funzioni seno e coseno. Si assumerà anche che il prodotto di due o più funzioni seno, essendo un infinitesimo di ordine superiore, possa essere trascurato rispetto agli altri termini. Operando le opportune semplificazioni sulla matrice di rotazione scritta in precedenza, si ha:

$$\begin{bmatrix}$$

$$]$$

$$1$$

$$-\theta_2$$

!1

$$\mathbf{R}^0, \omega_1, \omega_2 = \begin{bmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{bmatrix}$$

1

$$-\omega_0 \mathbf{j}.$$

(2.6.20)

-\omega_1

\omega_0

1

Se si suppone che un punto A sia solidale al sistema mobile, a causa della rotazione di questo rispetto al sistema fisso, il punto si porta in A'. Si ha quindi:

[

]

1

-\omega_2

\omega_1

r

[

]

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^0, \omega_1, \omega_2 * \mathbf{r}_A =$$

\omega_2

1

-!0

* rA =

-!1

!0

1

[

] [] [

]

1

-!2

!1

{ xA } { xA - yA!2 + zA!1 }

= [!2

1

-!0] yA

xA!2 + yA - zA!0

-!1

!0

[] = [

J

1

zA

xA!1 + yA!0 + zA

$$! rA = rA - rA = R0 , 1 , 2 * rA - rA = (R0 , 1 , 2 - I) * rA =$$

[

]

[

] []

0

-!2

!1

0

-!2

!1

{ xA }

= [!2

0

-!0] * r

[

]

A =

!2

0

-!0

yA

-!1

!0

[] =

0

-!1

!0

0

zA

[

]

|

|

[] []

{ - y

$$\begin{aligned} & | \\ & A^2 + zA^{-1} | \\ & \{ \}^0 \{ \} xA \{ \} \end{aligned}$$

=

$$= 1$$

.

$$| x$$

$$yA$$

(2.6.21)

$$| A^2 - zA^0$$

{

|

|

$$J [^2] \times []$$

z

x

A

$$A^1 + yA^0$$

y^3

$-x^2$

x^1

0

y^3

Il risultato è di particolare utilità quando si voglia ad esempio costruire dei programmi in cui si faccia uso del prodotto vettoriale e non esista una routine specifica per questo.

Con riferimento alla (2.6.21), si divida il primo e l'ultimo termine per un intervallo infinitesimo $!t$, ottenendo:

$\left[\right]$

$|$

$|$

$!0$

$|$

$\left[\right] \left[\right] \left[\right]$

$!$

$\{ !t \} \{ x \} \{ F \} \{ x \}$

r

A

x

A

A

lim

= v

!1

× yA

Fy

yA

!

A = lim

t → 0

!t

!t → 0 |

| !t

| | { } = { } × { } = F × rA . (2.6.23)

{ |

!2 |

J

zA

Fz

zA

!t

Il risultato ottenuto concorda con l'espressione, riportata in Appendice, della derivata di un vettore, se si tiene conto che nelle nostre ipotesi r_A è costante in modulo.

I concetti precedenti ci hanno permesso di giungere alla definizione della velocità angolare di un sistema di riferimento passando attraverso tre rotazioni infinitesime intorno agli assi coordinati.

Esempio 2.5. Individuazione delle rotazioni secondo i tre assi corrispondenti a una data matrice \mathbf{R} .

La matrice di rotazione del sistema [B] rispetto al sistema [A] sia:

[

]

0,866 - 0,5

0,00

A

[

].

$\mathbf{B R} =$

0,5

0,866 0,00

0,00

0,00

1,00

È facile vedere che la matrice risponde alla forma tipica di una rotazione intorno all'asse Z. Il sistema [B] è stato ruotato di 30 ° intorno all'asse Z del sistema [A].

Usando la matrice precedente si trovino le coordinate del punto P, rappresentato dal 1

vettore $\mathbf{BP} = 1$, rispetto ad [A], Ricordando che $\mathbf{AP} = \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{R} * \mathbf{BP}$ si ottiene:

1

[

][] [

]

0,866

- 0,5 0,00 } 1 } } 0,366 }

$\mathbf{AP} = [0,5$

0,866 0,00]

=

[1] [1,366] .

0,00

0,00

1,00

1

1,00

Si voglia ora trovare le coordinate rispetto al sistema [B] di un punto che abbia le 0 , 366

coordinate $AP = 1 , 366$. Per risolvere questo problema occorre calcolare la matrice

di rotazione B

AR in quanto $BP = B$

$AR * AP$. Ricordando che le matrici di rotazione sono caratterizzate dalla proprietà per cui l'inversa coincide con la trasposta si ha:

[

] [

] []

0 , 866

0 , 5

0 , 00

{ 0 , 366 } { 1 }

$$BP = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,866 & 0,00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,366 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} .$$

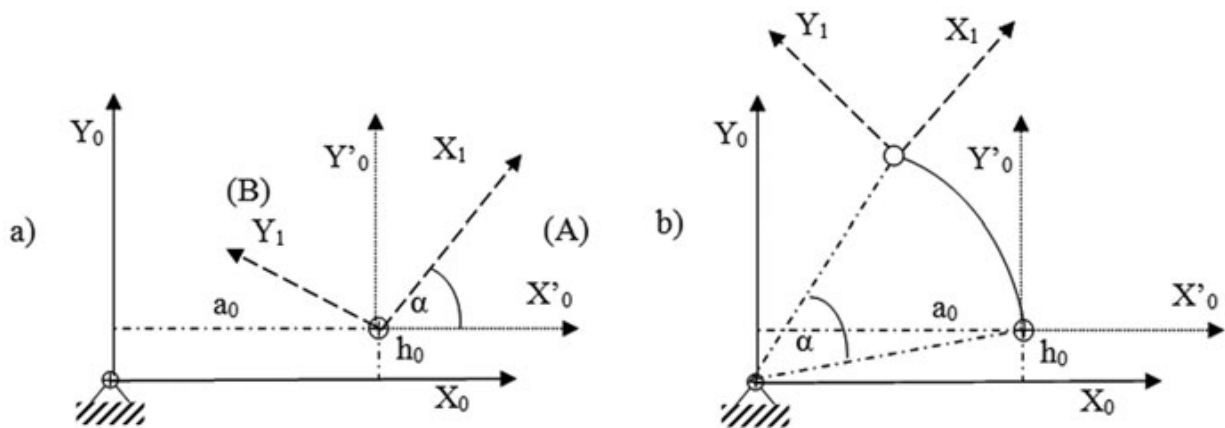
0 , 00

0 , 00

1 , 00

1

1



44

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

Fig. 2.19. Effetto della successione delle operazioni in una rototraslazione
Esempio 2.6. Per cercare di chiarire meglio il significato fisico delle operazioni sulle matrici di rototraslazione mostriamo un semplice esempio relativo a un sistema mobile, inizialmente coincidente con uno fisso, sottoposto a due diverse sequenze di operazioni elementari:

a) una traslazione dell'origine sul piano X-Y, seguita da una rotazione intorno all'asse Z mobile;

b) una traslazione dell'origine sul piano X-Y, seguita da una rotazione intorno all'asse Z fisso.

Il risultato della sequenza a) è riportato a sinistra nella Fig. 2.19. Il sistema ausiliario di assi $X_0 Y_0 Z_0$ mostra il sistema mobile dopo la traslazione. La rotazione successiva viene compiuta intorno all'asse Z_0 . Il sistema mobile nella posizione finale $X_1 Y_1 Z_1$ sarà ruotato dell'angolo α e avrà l'origine nel punto di coordinate $(a_0, h_0, 0)$ rispetto al sistema fisso. La matrice relativa alla sequenza sarà costituita dal prodotto di una traslazione pura per una rotazione intorno ad assi mobili, cioè:

[

]]

]]

]

1

0

0

a0

c0 - s0 0 0

c0 - s0 0 a0

|

||

||

|

0

| 0 1 0 h0 || s0

c0 0 0 || s0

c0 0 h0 |

1T = [0 0 1

0] [0

0

1

$$0 \] = \ [\ 0$$

0

1

$$0 \] .$$

0

0

0

1

0

0

0

1

0

0

0

1

Traslazione e rotazione sono indipendenti e la matrice di trasformazione finale si ottiene combinando la parte di rotazione con quella di traslazione nei giusti spazi della matrice OT . Una matrice come quella ottenuta rappresenta quindi un'operazione di 1

rototraslazione.

Se invece la rotazione è compiuta intorno all'asse fisso Z, la situazione finale è diversa. La matrice di trasformazione si ottiene moltiplicando nell'ordine opposto a quello del caso precedente, perché ogni operazione rispetto ad assi fissi comporta premoltiplicazione:

$$\begin{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}$$

$$c_0 - s_0 \ 0 \ 0$$

$$1$$

$$0$$

$$0$$

$$a_0$$

$$c_0 - s_0 \ 0 \ c_0 * a_0$$

$$\begin{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}$$

$$0$$

$$\begin{bmatrix} s_0$$

$$c_0$$

0

0 || 0 1 0 h0 || s0 c0 0 s0 * h0 |

1T = L 0

0

1

0] L 0

0

1

0] = L 0

0

1

0

] .

0

0

0

1

0

0

0

1

0

0

0

1

2.7 Scelta dei sistemi di riferimento

45

La posizione finale del sistema mobile è quella rappresentata a destra nella Fig. 2.19.

La rotazione produce effetti anche sulla posizione dell'origine del sistema di riferimento mobile.

Esempio 2.7. Due sistemi di coordinate sono inizialmente coincidenti, poi uno dei 1, 5

due è traslato secondo il vettore

0

. In seguito, il sistema mobile ruota rispetto

- 0, 5

all'asse X fisso, dell'angolo 0, quindi intorno all'asse Y ruotato dell'angolo

1 Si trovi la matrice di trasformazione:

[

]

]

]

1

0

0

0

1

0

0

1, 5

c1 0 s1 0

| 0 c0 - s0 0 || 0 1 0

0

|| 0

1

0

0 |

T

|

||

||

•

Si assuma un sistema inerziale di base [0] posizionato nel modo più opportuno per il problema da analizzare.

•

Si attribuisca una numerazione progressiva ai segmenti del sistema. Nei sistemi articolati seriali ogni segmento è collegato al precedente e al successivo mediante due giunti.

•

Si associ poi ad ogni segmento del sistema un sistema di coordinate ad esso solidale, scelto nel modo seguente:

– l'asse Z_i del sistema di riferimento [i], solidale al segmento con lo stesso numero, sarà diretto come l'asse del giunto i-esimo. Nella maggioranza dei casi i giunti sono rotoïdali per cui l'asse Z è posizionato sull'asse di rotazione del giunto. Si individui la perpendicolare comune ai due assi Z_i e Z_{i+1} . È buona norma far coincidere l'asse Z_0 con l'asse Z_1 per cui, quando la rotazione del giunto 1 è nulla, i due sistemi di riferimento [0] e [1] coincidano;

– si ponga l'origine del sistema [i] nell'intersezione tra a_i e Z_i . Si ponga l'asse X_i lungo a_i . Se i due assi Z_i e Z_{i+1} si intersecano si assegni X_i perpendicolare al piano dei due assi Z e passante dalla loro intersezione;

– si scelga l'asse Y_i normale agli altri assi dello stesso sistema (i), già definiti con verso tale da formare una terna destra con i primi due.

Per l'ultimo giunto si adotta una direzione dell'asse X_n coincidente con X_{n-1} quando la rotazione del giunto n è nulla.

 Image 41

 Image 42

 Image 43

46

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

Giunto i

Giunto i-1

Zi

Segmento i-1

a i

Zi-1

α -1

Xi

Yi

α

d i

Y

a

i-1 Xi-1

i-1

θ i-

Fig. 2.20. La convenzione di Denavit Hartenberg

Se la convenzione di Denavit-Hartenberg viene osservata, per ogni segmento vengono individuati quattro parametri, definiti nel modo seguente: a_{i-1} = la distanza tra Z_{i-1} e Z_i misurata lungo X_{i-1} ; θ_{i-1} = l'angolo da Z_{i-1} a Z_i misurato intorno a X_{i-1} ; d_i

= la distanza tra X_{i-1} e X_i misurata lungo Z_i ;

H_i

= l'angolo da X_{i-1} a X_i misurato intorno Z_i .

La convenzione presentata non porta ad una scelta univoca dei sistemi di riferimento.

Quando si individuano gli assi dei giunti dobbiamo scegliere arbitrariamente il verso degli assi Z_i perché sono possibili due scelte. Nel caso in cui due assi Z consecutivi si intersechino, il verso dell'asse X presenta due alternative. Infine quando gli assi Z_i Z_{i+1} sono paralleli la posizione dell'origine per il sistema $[i]$ è indeterminata. In questo caso la scelta dell'origine viene compiuta generalmente in modo da rendere di nullo.

Giunti sferici. Nel caso esistano nel sistema giunti sferici che permettano rotazioni intorno a tre assi ortogonali si creano dei segmenti artificiali di lunghezza nulla e a ciascun segmento si associa un sistema di riferimento con un grado di libertà unico.

Con riferimento alla Fig. 2.20, la generica matrice di trasformazione tra due sistemi successivi $[i-1]$, $[i]$ comporta una rotazione del sistema $[i]$ rispetto a $[i-1]$

intorno all'asse X_{i-1} , uno spostamento dell'origine del sistema $[i]$ secondo l'asse X_{i-1} fisso, della quantità a_{i-1} , seguita da una rotazione di H_i intorno a Z_i e da una traslazione lungo l'asse Z_i mobile di d_i . Trattandosi di rotazioni intorno ad assi mobili la matrice di trasformazione complessiva si ottiene postmoltiplicando nell'ordine le

 Image 44

2.7 Scelta dei sistemi di riferimento

Fig. 2.21. Applicazione della convenzione

Denavit Hartenberg a un modello del braccio

umano

matrici elementari corrispondenti alle trasformazioni descritte Si ottiene quindi:

$$\begin{bmatrix}$$

$$1$$

$$0$$

$$0$$

$$1$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$1$$

$$0$$

$$0$$

$$a_i - 1$$

$$cH_i$$

$$-sH_i \ 0 \ 0$$

$$|$$

||

||

|

$i - 1$

| $0 \ c_{0i-1} \ s_{0i-1} \ 0$ || $0 \ 1 \ 0$

0

|| s_{Hi}

c_{Hi}

0

0 |

i

$\mathbf{T} = |$

[

||

||

|

0

s_0

||

||

]

$i - 1$

$c_{0i - 1} 0$

0

0

1

0

0

0

1

0

0

0

0

1

0

0

0

1

0

0

0

1

[

]

1

0

0

0

|

|

|

0

1

0

0

|

| =

L

|

0

0

1

d]

i

0

0

0

1

[

]

cHi

- sHi

0

ai - 1

|

|

= | c0

|

i - 1sHi

$$c_{0i-1} c_{Hi+1} - s_{0i-1} - s_{0i-1} d_i \quad | .$$

[

|

(2.7.1)

s₀

]

$i - 1 s_{Hi}$

$s_{0i-1} c_{Hi}$

c_{0i-1}

d_i

0

0

0

1

Esempio 2.8. La Fig. 2.21 illustra un sistema articolato, vagamente somigliante a un arto umano superiore. Si assume ancora che il movimento del braccio avvenga nel piano e che le articolazioni siano rappresentate da giunti rotoidali.

La scelta dei sistemi di riferimento è particolarmente facile. Gli assi dei giunti sono tutti paralleli e normali al piano del moto. Gli assi Z_i sono stati assunti con il verso dal piano del moto verso l'osservatore. Gli assi X_i corrono lungo l'asse dei singoli segmenti, mentre gli assi Y_i formano con i precedenti delle terne destre.

È possibile impiegare il modello presentato ad esempio per il tracciamento della traiettoria del punto P quando i primi segmenti del braccio compiono una certa escursione angolare. Questo è un tipico caso di cinematica diretta, nel quale la traiettoria del punto P viene desunta con operazioni matriciali dalla legge di rotazione dei tre segmenti. La determinazione delle traiettorie di punti del sistema in funzione del tempo o dell'angolo di rotazione dei segmenti riveste una certa importanza per la biomeccanica, ad esempio nella progettazione dei tutori per la rieducazione motoria.

In questo caso il tutore è costituito da un sistema cinematico attuato da motori elettrici o pneumatici, applicato all'arto da rieducare.

48

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

Di analoga importanza è la cinematica inversa, che parte dalla conoscenza della posizione del punto P o di un'intera traiettoria per determinare la legge di movimento dei segmenti che compongono il sistema. In questo caso si cerca di ricostruire, registrando una traiettoria con telecamere o altri sistemi, i parametri più importanti del movimento. I metodi per la soluzione di problemi di cinematica inversa saranno brevemente trattati nel seguito. Si rimanda a testi avanzati di robotica e biomeccanica.

Vogliamo ora affrontare il problema della determinazione del vettore delle coordinate di P rispetto a un sistema di riferimento mobile o fisso, quando la sua posizione sia data rispetto al sistema [3] della mano. Sia il vettore che rappresenta in coordinate omogenee la posizione di P rispetto al sistema [3]

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

{ |

|

3

{

y

3

P

rP =

.

|

|

| 3 |

| zP |

{ |

|

J

1

Si ha:

[

] [

7f

7

|

|

| 3 |

| 3 |

| xP |

c03

- s03 0 12

| xP |

|

|

|

|

}

|

||

||

|

|

|

3

}

y }

| s0

| yy }

2

P

|

3

c03

0

0 |

P

rP = 2

=

.

3T |

|

|

(2.7.2)

|

| 3 | |

|| 3 |

| z |

0

0

1

0

| z |

| P | L

|| P |

L

|

|

J

|

|

L

|

|
J
1
0
0
0
1
1

Seguendo la stessa procedura possiamo calcolare il vettore posizione del punto P

rispetto al sistema 1 e rispetto al sistema base 0.

{
}
{
}
|
| 2
3
| xP |
| xP |
}

|

|

|

|

|

|

2

↳

{ 3 }

1

y^P

y^P

r^P = 1

= 1

=

2T |

| 2

2T * 2

3T

3

| z |

| z |

{ P |

|

J

|

|

{ P |

|

J

1

1

┌

└┘

└┘

┘

c0

3

2 - s02 0 l1

c03 - s03 0 l2

| xP |

|

||

||

|

}

|

|

3

{

= | s0

s0

y

|

2

c02 0 0 ||

3

c03 0 0 |

P

L

||

|

(2.7.3)

0

0

1 0] [0

0

1 0] |

| 3

| z |

[P |

|

]]

0

0

0 1

0

0

0 1

1

 Image 45

2.7 Scelta dei sistemi di riferimento

49

Fig. 2.22. Un movimento del braccio

[
]
[
]
|
| 1
3
| xP |
| xP |
}
|
|
|
|
|
|

1

{

{3 }

0

yP

yP

rP = 0

= 0

=

1T |

| 1

1T * 1

2T * 2

3T

3

| z |

| z |

{ P |

|

J

|

|

{ P |

|

J

1

1

Γ

ΓΓ

ΓΓ

ΓΓ

Γ

c0

3

1 - s01 0 0

c02 - s02 0 l1

c03 - s03 0 l2

| xP |

|

||

||

||

|

}

|

|

3

}

= | s0

s0

s0

y

|

1

c01 0 0 ||

2

c02 0 0 ||

3

c03 0 0 |

P

=

L

||

||

|

0

0

10 J L 0

0

10 J L 0

0

10 J |

| 3

| z |

{ P |

|

J

0

0

01

0

0

0 1

0

0

0 1

1

[

] [

]

c0

3

123

- s0123 0 l1c01 + l2c012 | xP |

|

||

|

}

|

|

3

{

= | s0

y

|

123

c0123

0 11s01 + 12s012 |

P

.

L

|

(2.7.4)

0

0

1

0

||

| 3

| z |

[P |

|

J

0

0

0

1

1

In cui $012 = 01 + 02$ e $0123 = 01 + 02 + 03$ Il risultato ottenuto mostra che per sistemi piani e assi paralleli la matrice di trasformazione è semplice e intuitiva. Infatti, la posizione angolare del terzo segmento è dovuta alla rotazione propria e a quelle dei segmenti precedenti. La posizione dell'origine è facilmente calcolabile per ispezione geometrica. È opportuno ricordare che gli angoli hanno un segno dipendente dalle convenzioni adottate, nel nostro caso positivo, se la rotazione è antioraria, negativo in caso contrario.

50

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

Esempio 2.9. La persona nella Fig. 2.22 ha inizialmente l'avambraccio, allineato con l'omero, ambedue diretti verticalmente. In seguito è compiuta un'abduzione della spalla di 60° (corrispondente ad una rotazione di -60° intorno a Z, se si utilizzano i sistemi di riferimento della figura). A questa si aggiunge una flessione del gomito di 120° (corrispondente a una rotazione intorno all'asse z_2 di 120° , con il sistema di riferimento adottato in figura). Supponendo che la lunghezza dell'omero sia 0,35 m e quella dell'avambraccio 0,30 m si determini la posizione del polso rispetto al sistema fisso collocato al centro della spalla e con gli assi come in figura. Si determini anche la posizione del polso rispetto a un sistema collocato nel

centro della testa, quando il vettore posizione dell'origine del sistema solidale alla spalla rispetto al sistema solidale alla testa sia:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,22 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,08 \\ 0 \end{pmatrix}$$

J

1

Soluzione. La matrice iniziale del braccio si ottiene dall'espressione:

[

] [

] [

]

1 0 0 0

1

0

0

0,35

1

0

0

0,35

|

||

||

|

0

| 0 1 0 0 | * | 0 0 - 1 0 | = | 0 0 - 1 0 | .

2T = 0

1 T * 1

2T = |

[

||

||

|

0 0 1 0] [0

1

0

0

] [0 1

0

0

]

0 0 0 1

0

0

0

1

0

0

0

1

La prima matrice identità, tiene conto del fatto che inizialmente nel centro dell'articolazione della spalla sono presenti due sistemi, il primo fisso, il secondo mobile. La seconda matrice nel prodotto rappresenta una traslazione dell'origine del sistema 2

lungo l'asse X1 di 0,35 m seguita, da una rotazione positiva di 90 ° intorno a X2. La rotazione è positiva perché per un osservatore che ha l'asse X2 che gli entra dai piedi e gli esce dalla testa, la rotazione del sistema di indice 2 risulta antioraria. Se vo-lessimo adesso conoscere la posizione del polso nella posizione iniziale del braccio, moltiplichiamo il vettore posizione del polso rispetto al sistema 2 per la matrice che lega il sistema di riferimento 2 al sistema 0, ottenendo:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0,35
 \end{bmatrix}$$

| 0,3 | | 0,65 |

|

||

|

{ |

|

{ |

|

}

|

|

}

0

0

| 0 0 - 1

0

|

0

rPOLSO = 0

=

.

2 T2rPOLSO = |

[

|

0

1

0

0

] |

|

| 0 | | 0 |

└ |

|

] |

|

└

|

|

] |

0

0

0

1

1

1

Il risultato era naturalmente del tutto prevedibile osservando la figura.

Nelle considerazioni precedenti abbiamo considerato il braccio nella posizione iniziale. Ora osserviamo che dopo l'abduzione della spalla il sistema solidale all'omero non è più coincidente con quello della spalla, ma ruotato rispetto all'asse Z di un angolo pari a -60° . Possiamo allora immaginare che i sistemi di riferimento da considerare siano i seguenti:

2.7 Scelta dei sistemi di riferimento

51

-

un sistema fisso d'indice 0;

-

un sistema mobile d'indice 1, coincidente col sistema precedente;

-

un sistema mobile d'indice 1, ruotato intorno all'asse Z1 di -60° e con la stessa origine;

-

un sistema mobile d'indice 2, traslato rispetto a 1 di 0,35 nella direzione X1

positiva e ruotato intorno a X2 di 90° ;

•

un sistema mobile Z_2 , con la stessa origine di Z_1 e ruotato rispetto a questo di 120°

rispetto a Z_2 .

Il prodotto matriciale corrispondente è il seguente:

0

2T_0

1T_1

${}^1T_0 * 1$

2T_2

${}^2T_1 =$

[

]

]

]

1

0

0

0

$c(-60) - s(-60) \ 0 \ 0$

1

0

0

0,35

|

||

||

|

= | 0 1 0 0

s(-60)

c(-60)

0

0

0

1

-1

0

L

||

||

|

0

0

1

0]]

0

0

1

0] * [0

0

0

0

] *

0

0

0

1

0

0

0

1

0

0

0

1

[

]

$c(120) - s(120) \ 0 \ 0$

|

|

* | $s(120)$

$c(120)$

0

0

[

|

0

0

1

0] =

0

0

0

1

Γ

ΓΓ

ΓΓ

Γ

0,5

0,8700

1

0

0

0,35

-0,5 - 0,8700

|

||

||

|

= | -0,870,500

0

0

- 1

0

0,87

- 0,500

L

||

||

|

0

0

1

0 || 0

1

0

0

||

0

0

1

0] =

0

0

0

1

0

0

0

1

0

0

0

1

[-

]

0,25 - 0,44 - 0,87

0,175

|

|

= | 0,44

0,76

- 0,5 - 0,31

[

|

0,87

- 0,5

0

0

].

0

0

0

1

Ricordiamo che la quarta colonna della matrice ottenuta rappresenta la posizione dell'origine del sistema 2 rispetto al sistema di base. Per ottenere adesso la posizione del polso rispetto al sistema di base basterà moltiplicare la matrice precedente per il vettore posizione del polso rispetto al sistema 2 ottenendo:

[

[] [

]

-

]

0,25 - 0,44 - 0,87

0,175 | 0,3 | | 0,1 |

|

||

{ |

{ |

}

|

-

{

0

0,44

0,76

- 0,5 - 0,31

0

0,17

r

|

|

POLSO = 0

=

.

2T2rPOLSO = [0,87 - 0,5

0

0

] |

|

[0 |

|

] |

|

{ 0, 26 |

|

J

0

0

0

1

1

1

Per conoscere ora la posizione del centro del polso rispetto al sistema di riferimento posto sulla testa, dobbiamo considerare che il sistema di base della spalla, è traslato

 Image 46

52

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

rispetto a quello della testa secondo il vettore

[

]

|

| 0, 15

}

|

|

-

}

0,22.

|

|

{ - 0,08 |

|

}

1

Pertanto la matrice che lega il sistema spalla a quello della testa, sarà:

[

]

1

0

0

0,15

|

|

B

$$| 0 \ 1 \ 0 \ -0,22 |$$

$$0 \mathbf{T} = [0 \ 0 \ 1 \ -0,08]$$

0

0

0

1

per cui la posizione del centro del polso rispetto alla testa sarà:

[

] [

] [

] [

1

0

0

0,15

$$| 0,1 | | 0,25 |$$

|

||

}

| |

|

-

{ } -

{

B

0

1

0

- 0,22

0,17

0,39

r

|

|

POLSO = B

=

.

0 T0rPOLSO = [0 0 1 - 0,08] |

|

[0 , 26]

|

] |

|

[0 , 18]

|

] |

0

0

0

1

1

1

Si deve quindi studiare meglio il movimento da realizzare per portare il polso nella vicinanza della bocca.

Esercizi

1.

Due sistemi di riferimento sono inizialmente coincidenti. Il sistema mobile viene inizialmente traslato rispetto a quello fisso secondo il vettore

[

]

|
 |
 | 0 |
 }
 |
 |
 }
 0,5
 |
 .
 |
 | 0 |
 }
 |
 |
 J
 1

In seguito viene ruotato rispetto all'asse X del sistema fisso di 90° . Trovare la posizione, rispetto al sistema fisso, di un punto, solidale al sistema mobile, le cui coordinate rispetto a questo sistema sono date dal vettore, in coordinate omogenee

[]

|

|

| 1 |

} |

|

{

1

|

.

|

| 1 |

{ |

|

J

1

 Image 47

 Image 48

 Image 49

2.7 Scelta dei sistemi di riferimento

53

2.

Nella gamba schematicamente rappresentata in figura, la lunghezza della coscia tra l'articolazione dell'anca e il ginocchio è di 40 cm e quella della tibia, ancora di 40 cm. La lunghezza del piede dalla caviglia alla punta è 18 cm. L'anca e il ginocchio sono flessi con gli angoli indicati. Si richiede:

- il posizionamento e il disegno di un sistema di assi per ogni segmento seguendo la convenzione di Denavit Hartenberg;
- le coordinate della punta del piede rispetto a un sistema di riferimento fisso con origine nell'anca;
- le matrici di trasformazione singole e complessive dall'anca alla caviglia;
- l'inversa della matrice globale che lega l'anca e la caviglia.

3.

Nel braccio articolato della figura la lunghezza dell'elemento OA è 0,4 m, quella dell'elemento AB 0,4 m, quella di BP 0,2 m. Si calcoli la posizione del punto P rispetto agli assi X_0, Y_0 . Si calcoli anche la matrice di trasferimento dal sistema [3] al sistema [0].

 Image 50

 Image 51

 Image 52

54

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

4.

Partendo dalla figura si traccino, seguendo la procedura di Denavit-Hartenberg, i sistemi di coordinate che servano a definire la posizione e l'orientamento dei segmenti inferiori del corpo.

5.

Con riferimento alla figura seguente si esegua una stima degli angoli formati da ciascun asse X_i di un sistema di riferimento con l'asse X_{i-1} del sistema precedente, ricordando le regole sul segno degli angoli. Assumendo che la lunghezza dei segmenti femorali sia pari a 0,45 m e quella delle tibie 0,40 m si calcoli la distanza tra la punta del piede arretrato e il tallone di quello avanzato, appoggiato sul terreno. Si assuma che le coordinate del punto di appoggio del tallone rispetto al sistema $X_6Y_6Z_6$ siano

$$\begin{matrix} \{ \\ \} \\ | \\ \{ - 0,05 | \\ \} \\ 6P = | - 0,08 . \\ \{ \\ | \\ \} \\ 0 \end{matrix}$$

Sempre con riferimento alla figura seguente si analizzi il moto oscillatorio dei vari segmenti del sistema di locomozione femore-tibia-piede,

tracciando dei diagrammi di massima che rappresentino gli angoli di rotazione durante tutto il ciclo del passo.

Applicazione alle strutture scheletriche e muscolari del corpo

umano

Si osservi la Fig. 2.23. La scelta dei sistemi di coordinate non è l'unica possibile. Es-sa ha lo scopo di illustrare la procedura di costruzione della matrice di trasferimento dell'arto inferiore. Si è assunto il sistema [0] fisso con l'origine nel baricentro del corpo, l'asse X_0 giace nel piano trasversale in direzione medio-laterale, l'asse Z_0 ha

 Image 53

2.7 Scelta dei sistemi di riferimento

55

Fig. 2.23. Terne di riferimento

la direzione longitudinale, l'asse Y_0 forma una terna destra con i primi due. Per l'articolazione coxo-femorale non è possibile individuare un'unica direzione per l'asse di rotazione, perché si tratta di un giunto sferico. L'asse X_1 è stato scelto secondo la congiungente il centro dell'articolazione coxo-femorale con quello dell'articolazione del ginocchio, l'asse Z_1 perpendicolare a X_1 nel piano frontale. Il terzo sistema di riferimento ha origine nel centro dell'articolazione del ginocchio con l'asse Z_2 nel piano frontale e con direzione orizzontale, X_2 anch'esso nel piano frontale e verticale, Y_2 normale ai primi due per formare una terna destra. L'ultima terna ha Z_3 , asse dell'articolazione della caviglia, orizzontale nel piano frontale, X_3 ancora nel piano frontale e normale a Z_3 , Y_3 nel piano sagittale. X_3 è verticale e diretta verso il basso, Y_3 è orizzontale diretta nel senso postero-anteriore. Se indichiamo con r_{01} il vettore che unisce l'origine del sistema [0] con quella del sistema [1], possiamo pensare che questo sia ottenuto traslando il sistema [0] sin quando la sua origine non si trovi nel centro dell'articolazione coxo-femorale e ruotando intorno all'asse

Y1 di un angolo α prossimo a 90° , indicato in figura. La matrice che rappresenta le due trasformazioni precedenti è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

1T = [0 0 1 z

]]

]

01

- s1 0 c1 0

0

0

0

1

0

0

0

1

[

]

c1

0

s1 x01

|

|

$$\begin{bmatrix}
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 y_{01} \\
 L \\
 | \\
 -s_1 & 0 & c_1 & z \\
 | \\
 \cdot
 \end{bmatrix}$$

(2.7.5)

$$\begin{bmatrix}
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 1 \\
 56
 \end{bmatrix}$$

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

La matrice così ottenuta rappresenta la posizione e l'orientamento del sistema di assi solidale al femore. Attraverso di essa possiamo rappresentare movimenti dell'articolazione coxo-femorale. Il movimento elementare di adduzione che porta il femore ad avvicinarsi all'asse longitudinale del corpo è rappresentato da una rotazione positiva intorno all'asse Y1. Il movimento elementare di flessione che porta il ginocchio ad allontanarsi dal piano frontale nel senso postero-anteriore è rappresentato

da una rotazione intorno all'asse Z1, infine la rotazione del femore intorno al suo asse è rappresentata da una rotazione intorno all'asse X1.

Considerando che la matrice precedente rappresenti per il femore la posizione di riferimento, una flessione dell'angolo α intorno a Z1, seguita da una rotazione di θ intorno a X1 porterebbero a una nuova matrice T_{10} data dall'espressione:

0

$${}^1T_{120} = T_x$$

T

$01, y_{01}, z_{01}$

$$Y_1, {}^1T_{Z1}, {}^2T_{X1}, 0 =$$

[

][

]

1

0

0

x_{01}

c_1

0

$s_1 0$

|

||

|

= | 0 1 0 y01

0

1

0

0

L

||

|

0

0

1

z

||

]*

01

- s1 0 c1 0

0

0

0

1

0

0

0

1

┌

└┘

└

$c^2 - s^2$ 0 0

1

0

0

0

|

||

|

* | s^2

c^2

0

0

0

$c_0 - s_0$

L

||

|

0

0

1

0] [0

s₀

c₀

0] =

0

0

0

1

0

0

0

1

[

]

$c_1 c_2$

$- c_0 c_1 s_2 + s_0 s_1$

$s_0 c_1 s_2 + c_0 s_1$

x_0

|

|

= |

s_2

$c_0 c_2$

$- s_0 c_2$

y_0

[

|

$- s_1 c_2$

$c_0 s_1 s_2 + s_0 c_1$

$- s_0 s_1 s_2 + c_0 c_1 z$

].

(2.7.6)

01

0

0

0

1

A titolo di esempio immaginiamo di voler conoscere la posizione del centro del ginocchio dopo movimenti di flessione-estensione, adduzione-abduzione, rotazione interna-esterna.

A questo scopo è sufficiente moltiplicare la matrice precedente per il vettore \mathbf{r}_{12}

che rappresenta la posizione del centro dell'articolazione del ginocchio rispetto al sistema di riferimento femorale [1], ottenendo:

$0\mathbf{r}$

1

2 = \mathbf{T}_x

\mathbf{T}

\mathbf{r}

01 , y01 , z01

Y1 , 1TZ1 , 2TX1 , 0

2 =

[

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$c_1 c_2$

$- c_0 c_1 s_2 + s_0 s_1$

$s_0 c_1 s_2 + c_0 s_1$

x_0

$| x_{12} |$

$|$

$||$

$\{ |$

$\}$

$= |$

s_2

$c_0 c_2$

$- s_0 c_2$

y_0

0

L

$|$

$=$

$- s_1 c_2$

$c_0s_1s_2 + s_0c_1$

$- s_0s_1s_2 + c_0c_1 z$

]

01

|

|

{ 0 |

|

]

0

0

0

1

1

[

]

|

| c_1c_2x

}

12 + x01 |

|

}

=

$$s_2 x_{12} + y_{01}$$

|

.

(2.7.7)

|

$$\{ -s_1 c_2 x_{12} + z_{01} \}$$

|

J

1

2.7 Scelta dei sistemi di riferimento

57

L'angolo θ non compare nell'espressione precedente, perché una rotazione del femore intorno al suo asse non sposta la posizione del centro del ginocchio. Per valutare numericamente le espressioni precedenti si assumano i dati seguenti:

{

}

{

}

|

| 0, 18

0, 45

}

|

|

}

|

|

}

|

|

}

0

0, 035

0

$r_1 = |$

;

$0 = 0; 1 = 72 \circ; 2 = 60 \circ \mathbf{r}_2 =$

.

|

{ - 0,3 |

|

}

|

|

{ 0 |

|

}

1

1

Ottenendo:

{

} {

}

|

| c(72)c(60) * 0,45 + 0,18

0,25

}

|

|

{ |

|

}

|

|

}

0

$$s(60) * 0,45 + 0,035$$

$$0,425$$

$$r2 = |$$

=

.

|

$$[- s(72)c(60) * 0,45 - 0,3 |$$

|

] |

|

$$[- 0,514 |$$

|
 J
 1
 1

Se vogliamo generalizzare i risultati precedenti considerando un generico punto solidale al femore ma non giacente sull'asse X1 si ha:

Or

1

P = 0

${}^1T * TY$

r

$1, {}^1TZ1, {}^2TX1, 0$

P =

(2.7.8)

[

] [

]

$c1c2$

$- c0c1s2 + s0s1$

$s0c1s2 + c0s1$

x

1

01

| xP |

|

||

}

|

1

↳

= |

s²

c⁰c²

- s⁰c²

y⁰1

y^P

┌

|

=

- s¹c²

$$c_0 s_1 s_2 + s_0 c_1$$

$$- s_0 s_1 s_2 + c_0 c_1 z$$

]

1

01

|

|

[zP |

|

]

0

0

0

1

1

[

]

|

| -

$$| s_1 c_2 x_P + (-c_0 c_1 s_2 + s_0 s_1) y_P + (s_0 c_1 s_2 + c_0 s_1) z_P + x_0 |$$

}

|

|

+

-

+

}

=

$s_2 x_1 + c_0 c_2 y_1$

$s_0 c_2 z_1 + y_0$

|

.

|

$| - s_1 c_2 x_1 + (c_0 s_1 s_2 + s_0 c_1) y_1 + (- s_0 s_1 s_2 + c_0 c_1) z_1 + z$

|

⌋

p

p

p

01

|
|
J
1

La matrice coxo-femorale può essere impiegata per analizzare la posizione di punti diversi del femore o di sistemi a esso collegati rigidamente, a condizione che si conosca la posizione di questi sistemi rispetto al sistema di riferimento solidale al femore. Se vogliamo studiare l'evoluzione del ginocchio durante il passo o la corsa, dobbiamo inserire nella matrice le terne di angoli $0, 1, 2$ corrispondenti a ogni valore discreto del tempo. Per ogni terna si ottiene un punto della traiettoria. Come si è detto, questo tipo di analisi prende il nome di cinematica diretta. Essa ha rilevanza in ambito clinico perché consente di prevedere e analizzare le traiettorie di punti notevoli dell'organismo. Il confronto di questi dati con quelli derivanti da misure condotte sul paziente, porta a individuare la presenza di patologie e anomalie del movimento. Nel caso particolare della riabilitazione è possibile, con il semplice modello presentato, prevedere l'escursione del movimento di un arto corrispondente a certi parametri della contrazione muscolare, in modo tale che l'azione riabilitativa sia calibrata. Infatti, occorre evitare da un lato di sollecitare eccessivamente le strutture muscolari e dall'altro di produrre forze troppo deboli per ottenere un processo di riabilitazione rapido ed efficace. I muscoli sono fissati ai segmenti ossei per mezzo dei tendini. Se i punti d'inserzione sono rilevati accuratamente, è possibile seguire l'evoluzione di questi

 Image 54

 Image 55

 Image 56

58

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

punti durante il movimento calcolando la loro distanza per ogni valore del tempo. In questo modo otterremo i dati che si riferiscono alla contrazione muscolare durante il movimento. Se a questi dati si associasse un affidabile modello del muscolo, che legghi i valori di contrazione alle forze sviluppate, saremmo in condizioni di valutare le forze muscolari.

In ambito sportivo la valutazione delle traiettorie dei punti che appartengono ai diversi segmenti del nostro corpo è pratica corrente. Nelle discipline di lancio ad esempio, è importante lo studio della traiettoria del braccio e del corpo per intervenire al fine di migliorare le prestazioni dell'atleta.

Il problema della cinematica inversa si enuncia così: data la conoscenza di uno o più punti della traiettoria determinare i valori degli angoli di movimento corrispondenti. Nel caso di un singolo segmento mobile come il femore, esiste una sola soluzione. Infatti, poiché il moto di un qualunque punto del femore è sferico, intorno al centro dell'articolazione, il problema è analogo a quello di determinare le coordinate sferiche di un punto quando siano note le coordinate Cartesiane. Nel nostro caso possiamo utilizzare il vettore posizione ottenuto in precedenza per scrivere l'eguaglianza:

$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ c_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ c_1 \sin \alpha_1 \end{pmatrix}$$

|

}

P

|

|

+

}

0

y^P

s_{2x1}

y₀₁

r

P

P =

=

.

|

(2.7.9)

|

| z | | - s_{1c2x1} + z |

{ P |

|

J |

|

{

P

01 |

|

J

1

1

Scrivendo la posizione del punto P rispetto al sistema di riferimento del femore:

{

}

{

}

|

|

| $x_P - x_{01}$ |

| c1c2x1 |

}

|

|

}

|

|

}

P |

|

}

1

yP - y01

s2x1

r

P

P =

=

.

|

$$\theta_1 = -\operatorname{atan2}(z_P - z_{01}, x_P - x_{01}) .$$

(2.7.11)

$$x_P - x_{01}$$

Dividendo la seconda per la prima si ottiene:

$$\frac{y_P - y_{01}}{x_P - x_{01}} = \tan \theta_1$$

$$\theta_1 = \operatorname{atan2}(y_P - y_{01}, x_P - x_{01})$$

cos θ_1 ;

$$\theta_2 = \operatorname{atan2}(x_P - x_{01}, \cos \theta_1 (y_P - y_{01})) .$$

(2.7.12)

Ricordiamo ancora che l'angolo θ_0 di rotazione intorno all'asse del segmento del femore non può essere determinato se non si conosce la posizione di un altro punto appartenente al femore o alle strutture muscolari a esso solidali e non giacente sul suo asse.

2.8 Sistemi per l'analisi della postura e del movimento

La cinematica inversa parte da misure effettuate sugli arti, seguiti durante il movimento da sistemi di telecamere, sensori di movimento, accelerometri. Nel caso, abba-

 Image 57

 Image 58

 Image 59

 Image 60

 Image 61

 Image 62

 Image 63

 Image 64

2.8 Sistemi per l'analisi della postura e del movimento

59

Y, y

P(X, Y, Z)

X, x

λ

Lente

Z, z

P'(x, y, z)

Fig. 2.24. Trasformazione prospettica

stanza comune, che il sistema di rilevamento del moto sia costituito da telecamere, si dispongono sugli arti del soggetto in esame dei marker luminosi o riflettenti. Tre marker non allineati sono sufficienti per determinare la posizione dell'arto ammettendo che si conosca la posizione relativa degli stessi marker rispetto al sistema di riferimento solidale all'arto. Ricordiamo che un corpo rigido nello spazio possiede sei gradi di libertà, sono quindi necessari sei parametri (coordinate) per definirne la posizione in modo univoco. Nei sistemi di *gait analysis* presenti sul mercato, s'individuano tre punti non allineati solidali al corpo, di cui nel corso dell'analisi si determina la posizione, insieme al valore del tempo. Si può obiettare che le coordinate necessarie per determinare la posizione di tre punti sono nove, in effetti, queste coordinate non sono tra loro indipendenti perché tre punti individuano un piano. Scrivendo le equazioni

che esprimono l'appartenenza dei tre punti al piano individuato, si ottengono tre relazioni che legano le nove coordinate. Le telecamere sono dotate di un sistema ottico che per semplicità considereremo costituito da un'unica lente di lunghezza focale f :

La trasformazione prospettica operata da un sistema ottico fa corrispondere a ogni punto di un oggetto esterno un altro punto, immagine del primo, che giace sul piano focale della telecamera. È evidente che poiché i punti dell'immagine giacciono su un piano le loro coordinate sono soltanto due, in altre parole l'informazione sull'oggetto è declassata da tri a bidimensionale. La trasformazione prospettica mette in relazione le coordinate del punto generico dell'oggetto ripreso dalla telecamera con quelle del suo punto immagine. Per convenienza i due sistemi di riferimento X, Y, Z globale e quello della telecamera x, y, z locale sono coincidenti. Osservando la Fig. 2.24 si ha, applicando i criteri di similitudine dei triangoli:

$$x = -f \frac{X}{Z} = X'$$

:

$$Z - f = Z'$$

$$: - Z'$$

(2.8.1)

$$y = -f \frac{Y}{Z} = Y'$$

:

$$Z - f = Z'$$

$$: - Z'$$

I segni negativi davanti a X e Y indicano che i punti dell'immagine sono capovolti, come si può osservare dalla figura. Le coordinate del punto immagine \mathbf{P} sono quindi:

:X

$$x = : - Z .$$

(2.8.2)

:Y

$$y = : - Z$$

 Image 65

 Image 66

 Image 67

 Image 68

 Image 69

 Image 70

 Image 71

 Image 72

 Image 73

60

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

Le relazioni precedenti non sono lineari, a causa della presenza della coordinata Z

al denominatore. È utile trovare la matrice di trasformazione che lega le coordinate x , y del punto immagine con quelle X , Y , Z del punto dell'oggetto. Se le coordinate di questo si esprimono in forma omogenea:

$\left[\begin{array}{c} | \\ | \\ \{x| \\ | \\ \} \\ Y \\ \mathbf{P} = \\ \cdot \\ | \\ | \\ \{z| \\ | \\ J \\ 1 \end{array} \right.$

La matrice di trasformazione che lega le coordinate omogenee del punto sul corpo a quelle del punto immagine è:

$\left[\begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right]$

|

|

|x *|

1

0

0

0

|x| |x|

| |

| | |

|

{ |

|

{ |

||

|

{ |

|

{ |

|

}

|

|

}

$y *$

| 0 1

0

0 |

Y

Y

P = T

|

|

view**P** =

=

=

.

|

(2.8.3)

|

|

|

||

|||z|

|z*| [0 0

1

0]|z|

|

|

||

|

|

|

|

||

|

||

|

||

|

|

J

k

0

0

- 1

: - Z

:

1

1

:

Normalizzando le coordinate, in modo che le prime tre componenti rappresentino le coordinate cartesiane del punto immagine, si ha:

[[[

]

|

|

|

|

x * |

| |

| :X |

|

[]

|

|

| |

|

| |

|

|

|

: - |

|

|

| | |

Z |

|

| k | |

|

| |

| | |

|

| x |

| | |

|

| |

| | |

|

{ |

|

|

|

{ y * |

| |

|

{ :Y |

|

y {

{

{

=

k

= : - Z .

|

(2.8.4)

|

| |

| | |

|

| z |

| | | : z |

| |

| z * | |

|

| |

|

|

|

|

| |

|

| |

|

|

|

|

|

1

|

|

| | | : - Z |

| k | |

|

| | |

|

| | |

|

U |

| |

| x | | x |

|

|

| |

| |

| |

|

|

|} } } }

0

1

0

0 | y

y

P = T - 1

=

.

view**P** = |

[

|

(2.8.5)

0

0

1

0] |

|

|0| |0|

{ |

|

] |

|

{ |

|

] |

0

0


1


:


1

1

1

 Image 74

 Image 75

 Image 76


 Image 77

 Image 78

2.8 Sistemi per l'analisi della postura e del movimento

61

Questo risultato ci conferma che non possiamo ricostruire la posizione di un punto di un oggetto sulla sola base delle informazioni 2D ottenute sul punto immagine. Per ricostruire la posizione del punto dobbiamo conoscere almeno una delle coordinate X , Y , Z sull'oggetto. Se, infatti, ripetiamo l'operazione di ricostruzione ponendo anche la coordinata z ottenuta nella trasformazione prospettica, otteniamo:

[
]
|
|
| : |
| x |
|
|

[

]

|

|

[]

[

] |

|

| z + : |

|

| []

1

0

0

0

|

| x

|

| |

|

|
| |X|
|
|
|x|
|
|
|
|
| |
| :y |
| |
| |
|
|
| }
| }
| } }
0

1

0

0 | y

y

Y

P = T - 1

=

= z + :=

.

view**P** = |

[

|

0

0

1

0] |

|

z

{z|

|

J

|

|

|

||

||z|

|

|

|

||

|

||:z|

|

||

|

||

|

J

0

0

1

1

{

J |

|

:

1

1 + z

|

|

:

|

|

1

| z + : |

|

|

|

|

|

|
└
|
|
1 J

(2.8.6)

La matrice T_{view} , prima descritta rappresenta una trasformazione prospettica. La matrice è stata ottenuta nell'ipotesi che i due sistemi di riferimento dell'oggetto e della telecamera siano coincidenti. Nella pratica questo caso accade raramente, perché la telecamera viene spostata ed inclinata per le esigenze della ripresa e il sistema di assi ad essa solidale si diversifica da quello a cui è riferito l'oggetto ripreso. Le considerazioni precedenti devono quindi essere integrate con la valutazione di alcune trasformazioni che, partendo da due sistemi coincidenti, li diversifichino in posizione e orientamento. Con riferimento alla Fig. 2.25 si fissi un sistema globale X, Y, Z rispetto al quale è riferita la posizione assoluta degli oggetti da riprendere e si immagini che il sistema x, y, z della telecamera, inizialmente coincidente con il primo venga traslato e ruotato. Le telecamere sono dotate di due movimenti di rotazione il primo, quello panoramico, è una rotazione intorno all'asse verticale locale della telecamera z_0 , il secondo, d'inclinazione, è una rotazione intorno all'asse orizzontale x_0 . Chiameremo θ, ϕ rispettivamente gli angoli d'inclinazione e panoramico.

Con riferimento alla Fig. 2.25 la sequenza delle trasformazioni è la seguente:

-

disposizione iniziale della telecamera, con l'origine del sistema dello snodo coincidente con quella del sistema globale;

-

una traslazione $\mathbf{R0}$ che permetta alla telecamera di inquadrare tutto il campo di ripresa;

-

una rotazione intorno all'asse fisso X dell'angolo θ che permette alla telecamera di avere la giusta inclinazione per inquadrare l'area di ripresa;

-

una rotazione intorno all'asse fisso Z dell'angolo panoramico α ;

-

una traslazione $\mathbf{R1}$ che tiene conto che il sistema di riferimento focale è traslato rispetto a quello dello snodo.

Come sappiamo ciascuna delle trasformazioni è rappresentata da una matrice 4×4

e la trasformazione composta è il prodotto delle matrici corrispondenti nel giusto ordine. Ricordiamo ancora che l'ordine dei fattori non è indifferente.

 Image 79

62

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

Fig. 2.25. Riferimenti della telecamera

Il prodotto delle quattro matrici che rappresentano i movimenti elementari descritti fornisce la matrice che lega il sistema globale XYZ al sistema focale x_1, y_1, z_1 :

XYZ

x

T =

1y1z1

┌

└┘

└┘

└┘

└

1 0 0 X

c2 - s2 0 0

1

0

0

0

1 0 0 X

|

r0

r1

|

||

||

||

|

0 1 0 Y

|| s2 c2 0 0 || 0 c0 - s0 0 || 0 1 0 Y |

= |

r0

r1

|

||

||

||

| =

L

||

||

||

|

0 0 1 Zr0]L 0

0

$$1 \ 0 \ \begin{bmatrix} 0 & s_0 & c_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_{r1} \end{bmatrix}$$

$$0 \ 0 \ 0$$

$$1$$

$$0$$

$$0$$

$$0 \ 1$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$1$$

$$0 \ 0 \ 0$$

$$1$$

$$\lceil$$

$$\rfloor$$

$$\left| c_2 - c_0 s_2 \ s_0 s_2 \ X_{r0} + c_2 * X_{r1} - c_0 s_2 * Y_{r1} + s_0 s_2 * Z_{r1} \right.$$

$$\left| \right.$$

$$\left| \right.$$

$$s_2$$

$$c_0 c_2$$

$$- s_0 c_2 \ Y$$

$$\begin{aligned}
 & | \\
 & = | \\
 & | \\
 & r_0 + s_2 * X_{r1} + c_0 c_2 * Y_{r1} - s_0 c_2 * Z_{r1} | .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & | \\
 & | \\
 & (2.8.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [0 \\
 & s_0 \\
 & c_0 \\
 & Z \\
 & | \\
 & r_0 + s_0 * Y_{r1} + c_0 * Z_{r1} \\
 &] \\
 & 0 \\
 & 0 \\
 & 0 \\
 & 1
 \end{aligned}$$

È da notare che la matrice della rotazione 2 precede quella di 0 anche se quest'ultima avviene prima dell'altra. Infatti, lo snodo è costruito in modo

che dopo la rotazione intorno ad x_0 quella successiva avviene intorno all'asse z_0 *non alterato dalla rotazione precedente*.

Dobbiamo notare però che la matrice per noi d'interesse è quella che lega il sistema globale a quello della telecamera, cioè l'inversa della precedente. Essa può

 Image 80

 Image 81

 Image 82

 Image 83

 Image 84

 Image 85

2.8 Sistemi per l'analisi della postura e del movimento

63

essere ottenuta invertendo la sequenza delle operazioni di traslazione e rotazione e cambiando segno sia alle rotazioni che alle traslazioni. Si ottiene quindi: $x_1y_1z_1$

XYZ $\mathbf{T} =$

[

T

T

T

]

1 0 0 - Xr1

1

0

0

0

c2

s2 0 0

1 0 0 - Xr0

|

||

||

||

|

= | 0 1 0 - Yr1

0

c0

s0 0

- s2 c2 0 0

0 1 0 - Yr0

L

||

||

||

|

0 0 1 - Z

||

||

||

] =

r1

0 - s0 c0 0

0

0

1 0

0 0 1 - Zr0

0 0 0

1

0

0

0

1

0

0

0 1

0 0 0

1

[

]

c2

s2

0

- c2 * Xr0 - s2 * Yr0 - Xr1

|

|

= | - c0s2 c0c2 s0 c0s2 * Xr0 - c0c2 * Yr0 - s0 * Zr0 - Yr1

L

|

s0s2

- s0c2 c0 - s0s2 * X

].

(2.8.8)

$$r_0 + s_0 c_2 * Y_{r0} - c_0 * Z_{r0} - Z_{r1}$$

0

0

0

1

Se adesso premoltiplichiamo per la trasformazione prospettica, otteniamo la matrice che lega le coordinate di un punto nello spazio globale alle coordinate del pixel della telecamera che rappresenta la sua immagine:

[

]

1

0

0

0

|

|

|

0

1

0

0 |

T *

=

*

view

Tview * x1y1z1

XYZ T = |

[

|

(2.8.9)

0

0

1

0]

0

0

- 1: 1

[

]

c2

s2

0

- c2 * X

|

r0 - s2 * Yr0 - Xr1

| -

|

|

s2 * c0

c2 * c0

s0

s2 * c0 * Xr0 - c2 * c0 * Yr0 - s0 * Zr0 - Yr1 | =

|

|

s2 * s0

- c2 * s0

c0

- s2 * s0 * Xr0 + c2 * s0 * Yr0 - c0 * Zr0 - Zr1

|

0

0

0

1

[

]

c2

s2

0

- s2 * Y

|

r0 - c2 * Xr0 - Xr1

-

|

= |

|

s2 * c0

c2 * c0

s0

s2 * c0 * Xr0 - c2 * c0 * Yr0 - s0 * Zr0 - Yr1

|.

[

|

$s_2 * s_0$

$- c_2 * s_0$

c_0

$- s_2 * s_0 * X_{r0} + c_2 * s_0 * Y_{r0} - c_0 * Z_{r0} - Z_{r1}$

]

$- 1:s_2 * s_0 \ 1:c_2 * s_0 - 1:c_0 \ 1 - 1:(- s_2 * s_0 * X_{r0} + c_2 * s_0 * Y_{r0} - c_0 * Z_{r0} - Z_{r1})$ **Fig. 2.26.** Campo di basket

 Image 86

 Image 87

 Image 88

 Image 89

 Image 90

 Image 91

 Image 92

 Image 93

 Image 94

64

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

Considerando ora un punto dello spazio riferito al sistema globale, il prodotto del suo vettore posizione per la matrice ottenuta sopra permette di ottenere le coordinate del pixel che rappresenta l'immagine del punto rispetto al sistema di riferimento del piano immagine.

xyzP

XYZ

im = T *

view

P =

[

]

c2

s2

0

- c2 * Xr0 - s2 * Yr0 - Xr1

|

|

= | - s2 * c0

c2 * c0

s0

s2 * c0 * Xr0 - c2 * c0 * Yr0 - s0 * Zr0 - Yr1

[

|

$s^2 * s_0$

$- c_2 * s_0$

c_0

$- s^2 * s_0 * X$

]

$r_0 + c_2 * s_0 * Y_{r0} - c_0 * Z_{r0} - Z_{r1}$

$- 1:s^2 * s_0 \quad 1:c_2 * s_0 - 1:c_0 \quad 1 - 1:(- s^2 * s_0 * X_{r0} + c_2 * s_0 * Y_{r0} - c_0 * Z_{r0} - Z_{r1})$

[] [

]

|

|

| X | |

(X - X

- Y

|

| P | |

P

$r_0) * c_2 + (Y_P$

$r_0) * s_2 - X_{r1}$

|

{ |

|

{ |

|

}

|

|

{

Y

$-(X - X$

$- Y$

$- Z$

*

P

P

$r_0) * c_0 * s_2 * + (Y_P$

$r_0) * c_0 * c_2 * + (Z_P$

$r_0) * s_0 - Y_{r1}$

|

=

.

|

| | |

(-

-

-

|

| ZP | |

X

$X_{r0}) * s_0 * s_2 * - (Y$

$Y_{r0}) * * c_2 * + (Z$

$Z_{r0}) * c_0 - Z_{r1}$

|

| |

|

| |

|

{

P

P

P

|

|

]

1

1

: [-(X -

-

P

$$X_{r0}) * s_0 * s_2 * + (Y_P - Y_{r0}) * s_0 * c_2 * - (Z_P - Z_{r0})c_0 - Z_{r1}] + 1$$

(2.8.10)

Il vettore ottenuto è espresso in coordinate omogenee e la coordinata Z non ha un significato fisico. Le coordinate Cartesiane del punto immagine di **P** si ottengono dividendo le prime due componenti per la quarta:

$$(X - X_{r0}) * c_2 + (Y - Y_{r0}) * s_2 - X_{r1}$$

x

P

P

$$\begin{aligned}
P = : [& -(X - X \\
& - Y \\
P & \\
r_0) * s_0 * s_2 * & + (Y P \\
r_0) * s_0 * c_2 * & - (Z P - Z_{r0})c_0 - Z_{r1+}:)] \\
& -(X - X_{r0}) * c_0 * s_2 * + (Y - Y_{r0}) * c_0 * c_2 * + (Z - Z_{r0}) * s_0 - \\
& Y_{r1}
\end{aligned}$$

y

P

P

P

P = :

.

[-(X - X

- Y

P

r_0) * s_2 * s_0+(Y P

r_0) * c_2 * s_0 - (Z P - Z_{r0})c_0 - Z_{r1+}:)]

(2.8.11)

Nel caso in cui X_{r0} , Y_{r0} , Z_{r0} siano nulli e sia anche $0 = 2 = 0$ le relazioni scritte si riducono alle:

:XP

$$x_P = : - Z_P$$

:YP

$$y_P =$$

.

: -

(2.8.12)

ZP

Come già visto nella (2.8.2).

Vediamo un'applicazione di quanto esposto all'analisi cinematica nello sport. Si supponga di avere un campo di basket con dimensioni regolamentari 15×28 m nel quale un giocatore sia nel punto indicato sulla linea di metà campo. L'origine del sistema di coordinate globale sia posta nel vertice inferiore sinistro del rettangolo di gioco. La telecamera sia posta su una struttura di supporto fuori dal campo da gioco nella posizione indicata in Fig. 2.27. Le coordinate del sistema di riferimento della telecamera la cui origine è sullo snodo nel quale convergono gli assi panoramico e d'inclinazione siano:

$$X_{r0} = - 3 \text{ m} ,$$

$$Y_{r0} = - 3 \text{ m} ,$$

$$Z_{r0} = 2 , 7 \text{ m} .$$

La posizione dell'origine del sistema di riferimento posto sul piano immagine rispetto al sistema di riferimento della telecamera sia: $x_{r1} = 0$, $y_{r1} = - 0 , 05$, $z_{r1} = - 0 , 15$. La distanza focale sia $f = 0 , 035$ m.

 Image 95

 Image 96

 Image 97

 Image 98

2.8 Sistemi per l'analisi della postura e del movimento

65

Fig. 2.27. Ricostruzione di una posizione

La posizione del baricentro del giocatore rispetto al sistema globale $X_P = 10,5$, $Y_P = 15,2$, $Z_P = 1,5$. Il baricentro del giocatore sia il punto di cui ricerchiamo le coordinate dell'immagine sulla telecamera. Per valutare l'angolo panoramico α e quello di inclinazione θ consideriamo che la telecamera sia sul suo supporto verticale.

Con gli assi di riferimento del piano immagine paralleli agli assi globali. La rotazione panoramica risulta quando si ruoti intorno a z con verso negativo:
 $\alpha = -$

$$10,5 + 3$$

a tan

$$= - 36,56^\circ.$$

$$15,2 + 3$$

L'angolo d'inclinazione, se si osserva la figura risulta:

$$\theta = -$$

$$2,7 - 1,5$$

tan

$$= - 93,03^\circ.$$

(18 , 22 + 13 , 52)

Ambedue gli angoli sono negativi. Applicando le formule precedenti si ottiene: $x_p = 0,0052$ $y_p = -0,0019$.

Si tratta di valori molto bassi per cui il punto immagine praticamente coincide con l'origine degli assi. È forse opportuno ricordare anche che un lieve errore nella stima della posizione del punto immagine può essere introdotto dagli arrotondamenti sempre presenti nel caso di operazioni aritmetiche. Il programma impiegato per il calcolo della posizione dell'immagine di un punto è stato sviluppato in ambiente Matlab. In appendice vengono riportate due distinte versioni del programma per ottenere le coordinate dell'immagine di un punto dato nel sistema di riferimento globale, la prima **cams1**, simbolica, permette di ottenere oltre alle coordinate dell'immagine le espressioni simboliche delle matrici coinvolte nel processo, la seconda **cam1**, numerica, per il calcolo dell'immagine di un punto o di una serie di punti.

Sistemi di riferimento locali e anatomici

I sistemi di analisi della postura e del movimento sono basati sulla ricostruzione in 3D

della posizione di marker collegati ai segmenti del corpo. Nella grande maggioranza

66

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

dei casi si tratta di sistemi televisivi con telecamere multiple e marker riflettenti o diodi emittenti nel campo dell'infrarosso. Qualunque sia il sistema impiegato, il file in uscita è costituito, dopo opportuna elaborazione, dalle coordinate X , Y , Z di una serie di punti nei quali i marker sono applicati. Poiché i rilevamenti vengono ripetuti con intervalli di tempo molto piccoli, dai dati ottenuti è possibile estrarre le traiettorie dei punti corrispondenti ai marker utilizzati, nonché le velocità e le accelerazioni dei punti stessi, utilizzando processi di derivazione numerica.

Per raggiungere livelli elevati di precisione nell'analisi cinematica il tempo viene discretizzato in piccoli intervalli, in modo tale che i successivi processi di derivazione per determinare le velocità e le accelerazioni dei singoli segmenti corporei, siano abbastanza precisi in relazione agli obiettivi dell'analisi. In questo paragrafo mostreremo come i dati ottenuti per i punti in cui sono presenti i marker vengano elaborati, per ottenere l'analisi del movimento dei singoli segmenti del corpo.

Sistema di riferimento globale

Il sistema di riferimento globale (GRS) sarà scelto opportunamente in base allo scenario in cui il movimento si svolge. È conveniente rendere coerente l'orientamento degli assi con quello presente sull'eventuale piattaforma di forza, cercando con una scelta oculata di evitare trasformazioni di assi non necessarie. Ispirandosi a quanto già fatto per gli assi anatomici, potremo assumere l'asse Z nella direzione verticale gli assi X , Y sul piano orizzontale, disposti in modo da formare una terna destra con l'asse Z. A questa disposizione può adeguarsi quella degli assi solidali a un'eventuale piattaforma baropodometrica. La calibrazione delle telecamere può essere svolta con due procedure distinte: se si conoscono gli angoli, panoramico θ e di inclinazione ϕ nonché i vettori di traslazione \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_1 si possono ottenere immediatamente le matrici che legano il sistema focale della telecamera a quello globale. La misura di questi parametri è però piuttosto difficoltosa e soggetta a errori rilevanti per cui si ricorre spesso a una procedura "cieca", basata sulla conoscenza delle coordinate di una serie di punti rilevanti nel sistema GRS e delle coordinate dei rispettivi punti immagine, espresse nel sistema focale. Per assicurare il parallelismo degli assi di una piattaforma di forza con quelli globali è sufficiente applicare una serie di marker sugli assi della piattaforma, a distanze note dall'origine. Con opportuni aggiustamenti si arriva a ottenere un parallelismo accettabile dei due sistemi, nei limiti degli errori ammissibili. Una volta compiuto il processo di calibrazione le telecamere non possono più essere mosse, anzi si deve prestare la massima attenzione che questo non accada accidentalmente.

Sistema di riferimento anatomico

Per ogni segmento è definito un sistema di assi a esso solidale (LRS), Local Reference System, con assi x_L , y_L , z_L , com'è stato visto in precedenza. Nel nostro caso abbiamo seguito la convenzione di Denavit Hartenberg che fornisce delle linee guida per la definizione dei sistemi di riferimento anatomici, lasciando poco spazio alle scelte arbitrarie. Le matrici di trasformazione tra un sistema e l'altro sono codificate

 Image 99

2.8 Sistemi per l'analisi della postura e del movimento

67

Fig. 2.28. Riferimenti anatomici

in funzione di quattro parametri, come si è visto in precedenza. Per ogni segmento un altro sistema anatomico è quello che ha origine nel baricentro del segmento e assi paralleli a quelli del sistema locale, (LRS). Il sistema locale baricentrico è indicato con la sigla LCRS, per Local Centroidal, Reference System. Infine viene definito un sistema locale definito in base ai marker LMRS, Local Marker Reference System per il quale la posizione del baricentro e l'orientamento degli assi vengono desunti in base alla posizione di tre marker posti su tre punti non allineati della superficie del segmento. I tre marker, M_1 , M_2 , M_3 in Fig. 2.28 vengono applicati sulla superficie del segmento per mezzo di strisce adesive. I tre punti che essi definiscono non devono essere allineati. Poiché tre punti non allineati o due rette concorrenti definiscono un piano prendiamo ad esempio la congiungente M_1 , M_3 come asse z_{LM} , e nel piano individuato da questo asse e dalla congiungente M_1 , M_2 tracciamo la normale comune a queste due semirette nel punto M_1 assumendo questa normale come asse y_{LM} .

Il verso positivo va all'esterno del segmento. Il terzo asse x_{LM} sarà assunto normale ai primi due in modo tale da formare con essi una terna destra. Per finire il sistema LCRS sarà, com'è stato accennato, con gli assi ordinatamente paralleli a quelli del sistema locale e con l'origine nel baricentro del segmento. Si pone ora il problema di mettere in relazione il sistema di riferimento definito dai marker con il sistema locale.

Il problema si risolve mediante un sistema di marker ausiliari provvisori per i quali è conosciuta o facilmente determinabile la posizione rispetto al sistema anatomico baricentrico. Se osserviamo il caso della gamba rappresentato in Fig. 2.28, marker M1 , M2 , M3 sono posizionati in corrispondenza del punto medio del bordo anteriore della gamba, della testa del perone e del malleolo laterale. I marker ausiliari C2 , C3

sono posizionati sul malleolo mediale e sul condilo mediale della tibia. La procedura di calibrazione anatomica segue quella delle telecamere nello spazio globale. Si svolge ponendo il paziente in posizione eretta e rilevando con le telecamere le coordinate dei marker normali e ausiliari nello spazio globale. Quest'operazione si svolge traguardando i marker con le telecamere e applicando l'algoritmo che permette di passare dalle coordinate dei punti immagine a quelle nello spazio globale. La giacitura dell'asse xL può essere definita come quella della congiungente i punti medi dei segmenti C2–M2 e C3–M3. L'asse così definito corrisponde alla linea che congiun-

 Image 100

 Image 101

 Image 102

 Image 103

 Image 104

 Image 105

 Image 106

 Image 107

 Image 108

 Image 109

 Image 110

 Image 111

 Image 112

 Image 113

68

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

ge i centri delle articolazioni del ginocchio e della caviglia. La giacitura dell'asse zL

può essere definita come quella della congiungente i marker C3–M3, mentre il terzo asse anatomico yL sarà definito come quella semiretta che parte dal punto medio del segmento di C3–M3 è perpendicolare agli altri due assi e forma con essi una terna destra. Il sistema di assi anatomico così definito rispetto al sistema globale, segue il segmento a cui è solidale in ogni movimento. Poiché la posizione dei marker ausiliari non varia rispetto al sistema di LMRS, non è necessario seguire la posizione dei marker ausiliari durante il movimento. Nelle analisi cinematiche e dinamiche interessa però il sistema di assi anatomico baricentrico LCRS, che può facilmente essere determinato osservando che il baricentro della gamba si trova sull'asse yL a una distanza nota o calcolabile dall'origine del sistema locale. Per ottenere quindi la matrice di trasformazione del sistema anatomico baricentrico rispetto a quello globale si dovrà moltiplicare la matrice di trasformazione del sistema anatomico LRS per una matrice di traslazione nota, lungo l'asse Y di questo.

Per chiarire i concetti precedenti facciamo un esempio, sempre riferito all'ambiente del basket. Immaginiamo che il giocatore sia in piedi al centro del campo, rivolto verso la linea di fondo più vicina alle telecamere. Le coordinate globali omogenee dei marker M1, C2, M2 e C3 , M3 siano rispettivamente:

$$M1 = (7,5 \ 13,95 \ 0,3 \ 1)$$

$$M2 = (7,46 \ 14 \ 0,1 \ 1)$$

$$C2 = (7,54 \ 14 \ 0,1 \ 1)$$

$$M3 = (7,45 \ 14 \ 0,5 \ 1)$$

$$C2 = (7,55 \ 14 \ 0,5 \ 1) .$$

Queste coordinate vengono riportate all'inizio, per chiarezza. In effetti, possono essere determinate dopo che le telecamere siano state individualmente calibrate utilizzando il processo di restituzione stereoscopica. L'equazione della retta che passa per i punti M1, M3 (coincidente con l'asse zLM del sistema associato ai marker) è: $X - 7,5 = Y - 14 = Z - 0,3$.

$$7,45 - 7,5$$

$$14 - 13,95$$

$$0,5 - 0,3$$

I cui coseni direttori rispetto al sistema globale risultano pari a: $p =$

$$(X3 - X1)^2 + (Y3 - Y1)^2 + (Z3 - Z1)^2 = 0,212$$

$$\cos(XxLM) = X3 - X1 = -0,236$$

$$\cos(YxLM) = Y3 - Y1 = 0,236$$

$$0,212$$

$$0,212$$

$$\cos(XxLM) = Z3 - Z1 = 0,943 .$$

$$0,212$$

Analogamente la retta che congiunge i punti M1 M2 ha l'equazione: $X - 7,5 = Y - 13,95 = Z - 0,3$.

$$7,46 - 7,5$$

14 - 13,95

0,1 - 0,3

I cui coseni direttori sono:

p =

$$(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2 = 0,0441$$

$$\cos(X_{xLM}) = X_2 - X_1 = -0,907$$

$$\cos(Y_{xLM}) = Y_2 - Y_1 = 0$$

0,0441

0,0441

$$\cos(X_{zLM}) = Z_2 - Z_1 = 0,943$$

0,212

2.8 Sistemi per l'analisi della postura e del movimento 69

Calibrazione della telecamera

Nel seguito ci riferiremo ancora alla matrice $T * view$. Ricordiamo che essa tiene conto sia della trasformazione prospettica che degli spostamenti e delle rotazioni della telecamera rispetto al sistema globale. Se conosciamo tutti i parametri che entrano nella formazione dei termini di questa matrice, la telecamera non ha alcun bisogno di calibrazione. Se, come invece succede spesso, questi parametri non sono tutti noti a priori o sono di difficile misura, si ricorre a una procedura di calibrazione (che può comunque, essere impiegata come procedura di controllo dei parametri), basata sulla formazione dell'immagine di un certo numero di punti (almeno sei) di cui sia nota la posizione in coordinate globali. L'equazione di formazione dell'immagine per ciascun punto P_i è:

[]

{

{

{

}

|

|

{x * P |

|X |

a

|X |

i |

}

|

{ Pi |

}

11

a12 a13 a14

|

{ Pi |

}

$y *$

Y

$| a$

$|$

Y

$\mathbf{p} * =$

P_i

$=$

P_i

$= | \begin{matrix} 21 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{matrix} |$

P_i

\cdot

i

$|$

$\mathbf{T} *$

(2.8.13)

$|$

view

$|$

$] *$

$\{z * P \mid$

$\mid Z \mid$

a

$\mid Z \mid$

i \mid

J

\mid

$\{ P_i \mid$

J

31

a₃₂ a₃₃ a₃₄

\mid

$\{ P_i \mid$

J

k_i

1

a₄₁ a₄₂ a₄₃ a₄₄

1

Ricordando che le coordinate Cartesiane dei punti **p_i** riferite alla telecamera si ottengono dividendo le corrispondenti coordinate omogenee per la quarta

componente e trascurando la componente z che non ha significato fisico si può scrivere: $x^* =$

*

+

+

+

P

x

k

a

a

a

i

Pi

$i = a_{11}X_{Pi}$

$12Y_{Pi}$

$13Z_{Pi}$

14

$y^* =$

*

+

+

+

P

y

k

a

a

a

i

Pi

$i = a_{21}XP_i$

$22Y_{Pi}$

$23Z_{Pi}$

24

$k_i = a_{41}XP + a$

+ a

+ a

i

$42Y_{Pi}$

43ZPi

44 .

(2.8.14)

Sostituendo l'espressione di k_i nella prima e nella seconda equazione si ottiene: $X P a$

a

a

$x * a$

$x * a$

$i_{11} + Y P_i 12 + Z P_i 13 - X P_i$

P_i

$41 - Y P_i P_i$

$42 -$

$- Z P x * a$

a

i

P_i

$43 - x P_i 44 + a_{14} = 0$

$X P a$

a

a

y * a

y * a

i 21 + YPi 22 + ZPi 23 - XPi

Pi

41 - YPi Pi

42 -

- ZP y * a

a

i

Pi

43 - yPi 44 + a24 = 0 .

(2.8.15)

Portando all'esterno il vettore delle incognite aij si ha:

[

] []

XP

YP

ZP

1

0

0

0

0 - XP xP

- YP xP - ZP xP - xP

| a₁₁ |

|

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

|

| |

|

| 0

0

0

0 X

Y

Z

1 - X y

- Y y

- Z y

- y ||

| a |

|

|

P1

P1

P1

P1 P1

P1 P1

P1 P1

P1 ||

| 12 |

|

| ..

..

.. . . .

..

.. ..

..

..

..

.. ||

| |

a |

|

||

| 13 |

|

|

||

| |

|

| ..

..

.. . . .

..

.. ..

..

..

..

.. ||

| a14 |

|

|

||

| |

|

| ..

..

.. . . .

..

.. ..

..

..

..

.. ||

| a |

21 |

|

||

{ |

}

| ..

..

..

..

.. ..

..

..

..

.. | a22

|

|

= 0 .

| ..

..

.. . . .

..

.. ..

..

..

..

.. || a |

|

||

| 23 |

|

| ..

..

.. . . .

..

.. ..

..

..

..

.. ||

| |

a |

|

||

| 24 |

|

|

||

| |

|

| ..

..

.. .. .

..

.. ..

..

..

..

.. ||

| a41 |

|

|

||

| |

|

| ..

..

.. . . .

..

.. . .

..

..

..

.. ||

| a |

42 |

L

||

| |

|

X

|| |

P

Y

Z

1

0

0

0

0 - X x

- Y x

- Z x

- x

| a |

6

P6

P6

P6 P6

P6 P6

P6 P6

P6

|

{ 43 |

J

0

0

0

0 XP

Y

Z

1 - X y

- Y y

- Z y

- y

a

6

P6

P6

P6 P6

P6 P6

P6 P6

P6

44(2.8.16)

 Image 114

70

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

Fig. 2.29. Calibrazione telecamera

L'equazione, scritta in forma matriciale nelle incognite a_{ij} , permette di ottenere i valori delle incognite, se si possiedono le coordinate rispetto al sistema globale e quelle delle rispettive immagini rispetto al sistema focale, per almeno sei punti. Nella pratica, a causa degli inevitabili errori e approssimazioni il processo di calibrazione ne impiega di più, cosa che genera un sistema di equazioni sovradeterminato. In questo caso s'impiegano algoritmi di minimizzazione dell'errore per una valutazione più precisa dei parametri.

Facciamo un esempio: supponiamo di voler eseguire la calibrazione di due telecamere che inquadrano un campo di basket. Poniamo le due telecamere al di fuori del campo. Le coordinate rispetto al sistema globale di queste siano: $X_1 = -$

$= -$

=

=

= -

=

r_0

3 m

Y_{1r0}

3 m

Z_{1r0}

1 m

X_{2r0}

18 m

Y_{2r0}

3 m

Z_{2r0}

1 m .

Ricordiamo che i valori riportati si riferiscono sia alla traslazione della telecamera rispetto al sistema globale per le esigenze di inquadramento della scena, sia al vettore che rappresenta lo spostamento dello snodo della telecamera dall'origine del sistema di riferimento sul piano focale.

Supponiamo che i 6 punti usati per la calibrazione abbiano le seguenti coordinate globali:

P1 (0 0 2) P2 (15 4 4) P3 (6 25 0 , 5) P4 (13 2 4 , 6) P5 (2 , 5 12 3) P6 (12 , 5 16 4 , 5) .

Per simulare un processo di calibrazione compiamo i passi seguenti:

-

calcoliamo per mezzo della matrice T * view le coordinate dei punti immagine di P1 ,..., P6 rispetto al sistema basato sul piano focale della telecamera;

-

calibriamo le due telecamere per mezzo dei punti P1 , P6 e delle loro immagini;

-

ricostruiamo i valori delle coordinate globali di P1 ,..., P6 partendo dalle coordinate sul piano focale dei punti immagine.

Gli angoli della telecamera di sinistra siano $\theta = -90^\circ / 2 = -45^\circ$. Quelli della telecamera di destra $\theta = -90^\circ / 2 = 45^\circ$.

 Image 115

 Image 116

 Image 117

 Image 118

 Image 119

2.8 Sistemi per l'analisi della postura e del movimento

71

Le coordinate dei punti immagine sulla prima telecamera sono:

$p1(-0,0000 \ 0,0083); p1(-0,0154 \ 0,0060); p1(0,0180 \ -0,0007)$

2

3

$p1(0,0090 \ 0,0058);$

$p1(0,0163 \ 0,0048);$

$p1(0,0036 \ 0,0050).$

4

5

6

La matrice $1T * view$ che comprende sia la trasformazione prospettica che quella dovuta al passaggio dal sistema globale a quello dell'immagine è la seguente:

[

]

|

$c2$

$s2$

0

$-c2 * Xr0 - s2 * Yr0$

|

|

|

1

| - s2 * c0

c2 * c0

s0

c0 * s2 * X

|

T *

=

r0 - c0 * c2 * Yr0 - s0 * Zr0

=

view

|

|

|

[s2 * s0

- c2 * s0

c0

- s0 * s2 * X

|

$$r_0 + s_0 * c_2 * Y_{r0} - c_0 * Z_{r0}$$

]

$$- 1:s_2 * s_0 1:c_2 * s_0 - 1:c_0 1 - 1:(- s_0 * s_2 * X_{r0} + s_0 * c_2 * Y_{r0} - c_0 * Z_{r0})$$

[

]

$$| 0,7071$$

$$- 0,7071$$

$$0$$

$$0,0000$$

|

|

|

$$= | 0,0000$$

$$0,0000 - 1,0000$$

$$1,0000$$

|

|.

|

$$\begin{bmatrix} | \\ 0,7071 \\ 0,7071 \\ 0,0000 \\ 4,2426 | \\ | \end{bmatrix}$$

- 20,2031 - 20,2031 - 0,0000 - 120,218

Se per la calibrazione utilizziamo le sei coppie di punti indicate prima, si ottengono per la matrice che lega i punti immagine ai punti nel sistema globale i seguenti valori numerici:

$$\begin{bmatrix} | \\ | \\ 1a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 11 \\ a12 \\ a13 \\ a14 \\ 1 \end{bmatrix}$$

|

|

T

1

1

1

1

Cal = [a21

a22

a23

a24]

1a

1

1

1

41

a42

a43

a44

[

]

$$0,0057 - 0,0057$$

$$0,0000 - 0,0000$$

= |

[-

|

$$0,0000$$

$$0,0000 - 0,0081$$

$$0,0081] .$$

$$- 0,1635 - 0,1635$$

$$0,0000 - 0,9728$$

Ricordando che la sottomatrice 3×3 formata con le prime tre righe e tre colonne della matrice $T^* \text{view}$ è una matrice ortogonale, si deduce che la somma dei quadrati dei termini di una riga o colonna di questa sottomatrice deve essere eguale all'unità. Si ha quindi:

$$a^2 + a^2 + a^2 * c = 1$$

da cui:

$$c = 123,5790$$

11

12

13

si ha allora

$$1\text{TCal}, \text{Norm} = 1\text{TCal} * 123,5790 =$$

$$\left[\right]$$

$$0,0057 - 0,0057$$

$$0,0000 - 0,0000$$

$$= 123,5790 * \left[-0,0000 \right]$$

$$0,0000 - 0,0081$$

$$0,0081 \left] =$$

$$-0,1635 - 0,1635$$

$$0,0000 - 0,9728$$

$$\left[\right]$$

$$0,7071$$

$$-0,7071$$

$$0$$

$$0,0000$$

$$= \left[\right]$$

$$0,0000$$

$$0,0000 - 1,0000$$

1,0000 J.

- 20,2031 - 20,2031 - 0,0000 - 120,2183

 Image 120

 Image 121

 Image 122

72

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

La matrice ottenuta nella calibrazione normalizzata è identica a quella ottenuta partendo dai parametri di rototraslazione e prospettiva. Confrontando i valori ottenuti per ciascun termine della matrice con le rispettive espressioni simboliche, si ottengono i parametri di rotazione (angoli θ , α la lunghezza focale e i parametri di traslazione della telecamera. Si ha:

$$\theta = \text{atan2}(a_{12}, a_{11}) = -45^\circ$$

$$\alpha = \text{atan2}(\cos\theta * a_{23}, a_{22}) = -90^\circ$$

$$s = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

31

32

33

Per quanto riguarda i parametri di traslazione occorre considerare che le componenti della distanza dello snodo della telecamera dall'origine del sistema focale sono note o facilmente misurabili per cui si ha:

$$-c * X_{r0} - s * Y_{r0} = 0$$

$$c_0 * s_2 * X_{r0} - c_0 * c_2 * Y_{r0} - s_0 * Z_{r0} = 1$$

$$- s_0 * s_2 * X_{r0} + s_0 * c_2 * Y_{r0} - c_0 * Z_{r0} = -(120, 218 + 1).$$

In cui x_{r1} , y_{r1} , z_{r1} sono, nel nostro caso, nulli. Si ottiene quindi il sistema lineare in tre equazioni e tre incognite:

$$- 0, 7071 * X_{r0} + 0, 7071 Y_{r0} = 0$$

$$Z_{r0} = 1$$

$$0, 7071 X_{r0} + 0, 7071 Y_{r0} - Z_{r0} = - 121, 218 .$$

$$0, 035$$

$$0, 035$$

I risultati sono $X_{r0} = Y_{r0} = - 2, 9975$ $Z_{r0} = 1$.

Il piccolo errore riscontrato è dovuto agli arrotondamenti nel calcolo dei prodotti e delle funzioni seno e coseno. Siamo adesso in grado di ricostruire la matrice $T * view$ della prima telecamera includendo anche la terza riga che contiene ormai funzioni note dei parametri precedentemente ottenuti. Avremo quindi:

[

]

$$0, 7071$$

$$- 0, 7071$$

$$0$$

$$0, 0000$$

|

|

1

0,0000

0,0000 - 1,0000

1,0000

T *

= |

|

view

[

0,7071

0,7071

0,0000

4,2426] .

- 20,2031 - 20,2031 - 0,0000 - 120,218

Per la seconda telecamera si ha:

$p_2(0,0250 \ 0,0024);$

$p_2(-0,0141 \ 0,0149); p_2(-0,0140 - 0,0006) \ 1$

2

3

$p2(-0,0241 \ 0,0077); p2(0,0006 \ 0,0033); p2(-0,0193 \ 0,0071).$

4

5

6

La matrice ottenuta nel processo di calibrazione risulta:

[

]

0,0017

0,0017

0,0000 - 0,0250

2T *

= [-

].

view, RID

0,0000 - 0,0000 - 0,0024

0,0024

0,0476 - 0,0476 - 0,0000 - 0,9974

 Image 123

2.8 Sistemi per l'analisi della postura e del movimento

73

0 , 0000

14 , 8492] .

20 , 2031 – 20 , 2031 – 0 , 0000 – 423 , 2641

La procedura di calibrazione ha avuto successo con il numero strettamente necessario di coppie punto-immagine, pari a sei. La trasformazione di prospettiva descritta è basata su un modello ideale della lente. Nella realtà il processo di formazione dell'immagine è accompagnato da deviazioni rispetto al modello ideale, dovute a cause diverse. Tra queste, le inevitabili aberrazioni dell'ottica, gli errori nell'individuazione delle coordinate del punto immagine, la presenza di vibrazioni etc. Per tener conto di questi fattori di disturbo, negli apparati sperimentali per la *gait analysis* la calibrazione è svolta con un numero di coppie di punti-immagine superiore, applicando poi processi di minimizzazione dell'errore ai minimi quadrati. Lasciamo ai testi specializzati la trattazione dell'argomento. Riportiamo in appendice il listato del programma Matlab utilizzato nell'esempio precedente.

Ricostruzione stereoscopica

Vediamo ora come, dalle immagini dello stesso punto sul piano focale di due telecamere diverse, si possa risalire alle coordinate globali. Con le ipotesi che abbiamo introdotto rispetto alla formazione dell'immagine, abbiamo che, se un punto viene ripreso da due telecamere dislocate in punti diversi e diversamente orientate, si formeranno due immagini nei rispettivi piani focali. Ragionando rispetto al sistema di riferimento globale e tenendo presente la Fig. 2.30, la prima immagine sarà allineata al centro ottico della lente della prima telecamera e al punto ripreso, la seconda immagine al centro ottico dell'altra telecamera e al punto ripreso. Le due rette così individuate s'intersecano in corrispondenza del punto oggetto ripreso, di cui sarà quindi semplice individuare tutte le coordinate. Per costruire i vettori delle coordinate dei punti \mathbf{p} , \mathbf{p} , $\mathbf{C1}$, $\mathbf{C2}$ nel sistema di riferimento globale, dobbiamo utilizzare le matrici di trasformazione che legano i sistemi sul piano focale delle telecamere a **Fig. 2.30**. Ricostruzione stereoscopica

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

quello globale. La matrice che mette in relazione il sistema focale della telecamera 1 al sistema globale è la seguente:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & X_{r0} \\
 c_2 - s_2 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & Y \\
 s_2 & c_2 & 0 & 0 \\
 0 & c_0 - s_0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

XYZ

|

r0 ||

||

|

x

T = |

||

||

|

1y1z1

|

[0 0 1 z ||

||

|

r0] [0

0

1 0] [0 s0 c0 0]

0 0 0

1

0

0

0 1

0 0

0

1

[

]

| c² - c₀s²

s₀s² X_{r0}

|

|

s²

c₀c² - s₀c² Y |

= |

|

r₀ |

|

|.

(2.8.17)

[0

s0

c0

Z

|

r0]

0

0

0

1

Un'espressione del tutto analoga si avrà per la matrice di trasformazione della se-x

conda telecamera 2y2z2 T. Poiché il processo di calibrazione ha permesso di ottenere XYZ

i dati relativi ai parametri della rototraslazione per ambedue le telecamere, potremo valutare numericamente le matrici precedenti:

[

]

0 , 7071

0 , 0000 0 , 7071 - 3 , 0000

| -

|

XYZ

| 0,7071

0,0000 0,7071 - 3,0000 |

x

T =

1y1z1

[

0

- 1,0000 0,0000

1,0000]

0

0

0

1,0000

[

]

0,7071 - 0,0000 - 0,7071 18,0000

|

|

XYZ

| 0,7071

0,0000

0,7071 - 3,0000 |

x

T =

2y2z2

[

0

- 1,0000

0,0000

1,0000] .

0

0

0

1,0000

Il punto C1 ha rispetto al sistema focale x1, y1, z1 della prima telecamera le coordinate:

[] [

]

|

|0

0

{ |

|

{ |

|

}

|

|

}

x

0

0

1y1z1 C =

=

1

|

|

{: |

|

] |

|

{ 0 , 035 |

|

] |

1

1

le corrispondenti coordinate globali saranno:

[

] [

] [

] |

0 , 7071

0 , 0000 0 , 7071 - 3 , 0000

| 0 | | - 2 , 9753 |

|

|

| |

|

-

|K

{ } -

{

XYZ

0,7071

0,0000 0,7071 - 3,0000

0

2,9753

C = |

|

=

.

1

L

0

- 1,0000 0,0000

1,0000] |

|

[0,035 |

|
J |
|
{ 1,0000 |

|
J
0
0
0
1,0000
1
1,0000

2.8 Sistemi per l'analisi della postura e del movimento 75

Analogamente per il centro ottico C2 della seconda telecamera si ha:

[
] [
]
0,7071 - 0,0000 - 0,7071 18,0000 | 0 |
|
||

}

|

}

XYZ

0,7071

0,0000

0,7071 - 3,0000

0

C

|

|

2 =

XYZ

=

x

T x²y²z² C² =

2y²z²

[

0

- 1,0000 0,0000 1,0000]|

|

{ 0 , 035 |

|

]

0

0

0

1 , 0000

1

[

]

|

|

{ 17 , 9753 |

|

}

= - 2 , 9753 .

|

|

{ 1 , 0000 |

|

J

1,0000

Se adesso prendiamo uno qualsiasi dei punti impiegati per la calibrazione ad esempio il punto **P1**

[]

|

|

{ 0 |

|

{

0

P1 = |

|

{ 2 |

|

J

1

la cui immagine è sul piano focale

[

}

|

| -

| 0,0000 |

}

|

|

}

x

0,0083

1y1z1 p1 =

.

1

|

|

|

0

|

l

|

|

J

1

Le coordinate del punto immagine rispetto al sistema globale sono: XYZ_p
= XYZ

1

x

$T_{x_1 y_1 z_1 p_1}$

$1 y_1 z_1$

1

[

] [

]

0,7071

0,0000 0,7071 - 3,0000

| - 0,0000 |

|

|

|

|

|

-

|

|

= | 0,7071

0,0000 0,7071 - 3,0000

0,0083

|

|

|

|

0

- 1,0000 0,0000

1,0000] |

|

|

0

|

|

|

|

]

0

0

0

1,0000

1

[

]

|

| -

| 3,0000 |

}

|

|

-

}

=

3,0000

|

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ | \\ | 0,9917 | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ | \\ 1,0000 \end{pmatrix}$$

L'immagine di **P1** sul piano focale della seconda telecamera è:

$$\begin{pmatrix} | \\ | \\ | \\ | \\ | 0,0251 | \\ | \\ | \\ x \\ 0,0024 \\ 2y^2z^2 \mathbf{p2} = \\ 1 \end{pmatrix}$$

|

|

{ 0 |

|

J

1

 Image 124

 Image 125

 Image 126

 Image 127

 Image 128

 Image 129

 Image 130

 Image 131

 Image 132

 Image 133

 Image 134

 Image 135

 Image 136

 Image 137

 Image 138

 Image 139


 Image 140

 Image 141

76

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

che, riferita al sistema globale, diventa:

$${}^X Y Z \mathbf{p}_2 = X Y Z$$

1

x

$\mathbf{T}_{x_2 y_2 z_2} \mathbf{p}_2$

$2 y_2 z_2$

1

[

] [

]

0,7071 - 0,0000 - 0,7071 18,0000

| 0,0251 |

|

||

}

|

}

= | 0,7071

0,0000

0,7071 - 3,0000

0,0024

[

|

0

- 1,0000

0,0000

1,0000] |

|

{ 0 |

|

]

0

0

0

1 , 0000

1

[

]

|

|

{ 18 , 0177 |

|

}

= - 2 , 9823 .

|

|

[0 , 9976 |

|

]

1 , 0000

Le equazioni delle due rette che passano rispettivamente per le coppie di punti p1 C

1

1

e p2 C

1

2 sono:

X - X

Y - Y

Z - Z

p1

p1

p1

1

=

1

=

1

XC - X

Y

- Y

Z

- Z

1

p1

C1

p1

C1

p1

1

1

1

X - X

Y - Y

Z - Z

p2

p2

p1

1

=

1

=

1

XC - X

Y

- Y

Z

- Z

2

p²

C₂

p²

C₁

p₁

1

1

1

da cui si ha il sistema:

X

X

Y

-

Y

=

p1

p1

1

-

1

XC - X

Y

- Y

X

- X

Y

- Y

1

p1

C1

p1

C1

p1

C1

p1

1

1

1

1

X

X

Y

-

Y

=

p²

p²

1

-

1

XC - X

Y

- Y

X

- X

Y

- Y

2

p²

C2

p²

C2

p²

C2

p²

1

1

1

1

X

X

Z

-

Z

=

p^2

p^2

1

-

1

.

(2.8.18)

$X^C - X$

Z

- Z

X

- X

Z

- Z

2

p^2

C^2

p^2

C^2

p^2

C2

p2

1

1

1

1

La soluzione del sistema precedente fornisce i valori cercati delle coordinate X , Y , Z

del punto P date le coordinate della sua immagine sui piani focali delle due telecamere. Il risultato ottenuto dal programma **globcor** il cui listato è riportato in appendice è:

Cordglob =

P1

P2

P3

P4

P5

P6

0 , 00

15 , 00

6 , 00

13 , 00

2 , 50

12 , 50

0 , 00

4 , 00

25 , 00

24 , 00

12 , 00

16 , 00

2 , 00

4 , 00

0 , 50

6 , 00

3 , 00

4 , 50

con

[

]

[]

[

}

{0,0}

{15}

{6}

P1 = [0,0]

P2 = [4]

P3 = [25]

2

4

0,50

{ }

{

}

{

}

{13}

{2,5}

{12,5}

P4 = [24]

P5 = [12]

$$P6 = [16]$$

6

3

4 , 5

 Image 142

 Image 143

 Image 144

 Image 145

 Image 146

 Image 147

2.8 Sistemi per l'analisi della postura e del movimento

77

Come si può verificare le coordinate dei sei punti globali impiegate nell'esempio vengono ricostruite esattamente. Il programma può mancare di fornire soluzioni quando qualcuno dei denominatori presenti nei coefficienti delle incognite o nei termini noti del sistema diventa nullo. In un sistema in movimento questo può accadere per particolari posizioni dei punti inseguiti e per particolari coppie di telecamere. Nei sistemi di gait analysis correntemente impiegati, il numero di telecamere è in genere superiore a due. L'algoritmo illustrato non richiede difficili allineamenti delle telecamere e permette di ricostruire le posizioni spaziali dei vari marker con un numero limitato di calcoli. La procedura è alla base di successivi algoritmi per il calcolo delle traiettorie, delle velocità e delle accelerazioni dei marker.

Esercizi

1.

Calcolo della lunghezza del passo.

Calcolare la lunghezza del passo come modulo della distanza tra le caviglie conoscendo la coordinata della caviglia anteriore **4PD** rispetto al sistema mobile 4. Attenzione al segno degli angoli!

[

]

0,5

|

|

4

0

P

|

|

$D = [0]$,

1

$\theta_1 = 60^\circ$,

$\theta_2 = 15^\circ$,

$\theta_3 = 120^\circ$,

$\theta_4 = 25^\circ$,

$$L = OA = AB = BC = CD = 0,5 \text{ [m]}.$$

Soluzione. La soluzione del problema si trova applicando la teoria delle matrici di trasformazione.

La matrice globale è definita come segue:

4

$${}^0\mathbf{T} = 0$$

$${}^1\mathbf{T} \cdot 1$$

$${}^2\mathbf{T} \cdot 2$$

$${}^3\mathbf{T} \cdot 3$$

$${}^4\mathbf{T} .$$

 Image 148

 Image 149

 Image 150

 Image 151

78

2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody

Dove ogni matrice di trasformazione ha la generica espressione:

[

]

$\cos(\theta_i)$

- sin(0i)

0

0

|

|

i - 1

| sin(0i)

cos(0i)

0

0 |

i T = [

0

0

1

0]

dove

i = 1 : 4 .

0

0

0

1

Calcolando i vari prodotti otteniamo la matrice globale:

[

]

0,3420

0,9397

0

0,7330

|

|

4

| -0,9397 0,3420 0 0,5624 |

$0\mathbf{T} = \lfloor$

0

0

1

0

\rfloor .

0

0

0

1

Le coordinate assolute del punto D si ottengono moltiplicando la matrice globale per le coordinate della caviglia relative al sistema di riferimento locale 4

[

] [

] [

]]

0,3420

0,9397 0 0,7330

0,5

0,040

|

||

||

|

0

- 0,9397 0,3420 0 0,5624

0

0,0926

P

|

||

||

|

$$D = 4$$

$$0T \cdot 4PD = \lfloor$$

0

0

1

0

$$\rfloor \cdot \lfloor 0 \rfloor = \lfloor$$

0

\rfloor.

0

0

0

1

1

1

2.

Calcolo della traiettoria della caviglia durante il passo. Assegnata la legge di variazione degli angoli formati tra i vari segmenti, calcolare la traiettoria della caviglia.

Tempo [s]

0

0,25

0,50

0,75

1

01

110

104,14

90

75,85

70

02

0

0

0

0

0

03

140

151,71

180

208,28

220

04

0

- 35

- 70

- 35

0

0sum

250

220,86

200

249,14

290

Soluzione:

La matrice globale è ottenuta come prodotto tra le singole matrici di trasformazione: 0

$$4\mathbf{T} = 0$$

$$1\mathbf{T} \cdot 1$$

$$2\mathbf{T} \cdot 2$$

$3T \cdot 3$


$4T$

 Image 152

 Image 153

 Image 154

 Image 155

 Image 156

2.8 Sistemi per l'analisi della postura e del movimento

79

a titolo di esempio riportiamo il prodotto delle prime due matrici

[

]

[

]

$\cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) \ 0$

0

$\cos(\theta_2) - \sin(\theta_2) \ 0$

11

|

|

|

|

0

| sin(01) cos(01) 0

0 |

1

| sin(02) cos(02) 0

0 |

${}^1\mathbf{T} = \begin{bmatrix}$

0

0

1

0]

${}^2\mathbf{T} = \begin{bmatrix}$

0

0

1

0]

0

0

0

1

0

0

0

1

0

$2\mathbf{T} = 0$

$1\mathbf{T} \cdot 1$

$2\mathbf{T} =$

[

]

(cos(0

|

$1) \cdot \cos(02) - \sin(01) \cdot \sin(02))$

$(- \sin(02) \cdot \cos(01) - \sin(01) \cdot \cos(02)) \ 0 \ 11 \ \cos(01)$

|

|

$| \ (+\sin(02) \cdot \cos(01) + \sin(01) \cdot \cos(02)) \ (\cos(01) \cdot \cos(02) - \sin(01) \cdot \sin(02)) \ 0 \ 11 \ \sin(01) \ |.$

[

|

0

0

1

0

]

0

0

0

1

Attraverso l'uso delle formule di addizione e sottrazione, la matrice 0T_2 ha la seguente

forma:

[

]

$\cos(\theta_1 + \theta_2) \quad -\sin(\theta_1 + \theta_2) \quad 0 \quad l_1 \cos(\theta_1)$

|

|

0

$|\sin(\theta_1 + \theta_2) \quad \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad 0 \quad l_1 \sin(\theta_1)|$

${}^2T =$ [

0
0
1
0
|
0
0
0
1

moltiplicando le 4 matrici di trasformazione otteniamo la matrice globale: 0

4TGlobale =

[
]

cos(0

|

$1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) - \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \ 0 \ I_1 \cos(\theta_1) + I_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + I_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

|

|

$\left| \begin{array}{ccc} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) & 0 \\ I_1 \sin(\theta_1) + I_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + I_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & & \end{array} \right|$.

[

|

0

0

1

0

]

0

0

0

1

Tempo [s]

0

0 , 25

0 , 50

0 , 75

1

X0

- 0 , 6156

- 0 , 6702

- 0 , 4229

0,1696

0,6156

Y0

0

0 , 142

0 , 2961

0,0159

0

Z0

0

0

0

0

0

Traiettoria della caviglia durante il passo

Coordinate Caviglia

0,35

0,30

0,25

0,20

0,15

0,10

0,05

0

-1 -0,5 0 0,5 1

 Image 157

3

Le articolazioni

3.1 Gradi di libertà nella biomeccanica. Le articolazioni

Ricordando che un corpo rigido nello spazio possiede tre gradi di libertà di traslazione e tre di rotazione e nel piano due di traslazione e uno di rotazione, possiamo impostare un modello del corpo umano in base alle seguenti semplificazioni:

-

ogni segmento che compone il sistema sia considerato come corpo rigido collegato ai segmenti contigui attraverso le articolazioni;

-

la configurazione del corpo sia definibile attraverso un numero finito di parametri, i suoi gradi di libertà;

-

le caratteristiche d'inerzia dei vari segmenti siano calcolabili ricorrendo a opportune ipotesi semplificative, quali la riconduzione a forme geometriche semplici, o misurabili sperimentalmente;

-

il sistema, soggetto a forze esterne, come quelle di gravità e quelle dovute all'ambiente circostante, è controllato nel movimento e nella stabilità da un numero finito di azioni muscolari, applicate in corrispondenza di punti definiti dei vari segmenti.

Ricorderemo i principali tipi di articolazioni, ricorrendo alle definizioni della medicina, necessarie per una trattazione interdisciplinare dei problemi. Le articolazioni sono collegamenti tra capi ossei aventi forme coniugate alle estremità, tenuti insieme da tessuti connettivi. Possono essere di tipo mobile (ad esempio la spalla), semi-mobile (tra le vertebre), o fisso (tra le ossa del cranio). Si dividono in *sinartrosi* e *diantrosi*.

Sinartrosi

Le sinartrosi sono dispositivi giunzionali tra due capi ossei contigui. Possono essere suddivise in tre sottocategorie rispetto al tessuto connettivo che si infrappone tra gli stessi capi ossei, in *sinfibrosi*, *sincondrosi* e *sinfisi*.

Picasso B.: Fondamenti di Meccanica e Biomeccanica. Meccanica dei corpi rigidi articolati.

DOI 10.1007/978-88-470-2333-8_3, © Springer-Verlag Italia 2013

82

3 Le articolazioni

Sinfibrosi

Nelle sinfibrosi, o articolazioni fibrose, il tessuto di congiunzione è prevalentemente costituito da connettivo ricco di collagene, e in alcuni casi abbondante in fibre elastiche. Si distinguono all'interno delle articolazioni fibrose tre diverse categorie: suture, gonfosi e sindesmosi.

Suture

Le *suture* presentano tessuto connettivo denso che costituisce la membrana di sutura, o legamento di sutura, e sono presenti tra le ossa del cranio, per lo più tra ossa piatte.

La membrana di sutura presenta regioni differenziate al fine di permettere l'accre-scimento osseo, le superfici di sutura delle ossa che si affrontano nella sutura sono invece rivestite da un sottile strato di cellule osteogenitiche in continuità con il periostio. In alcune suture il tessuto connettivo si ossifica con il tempo, in questo caso la sutura diventa una *sinostosi*. Le *suture* possono essere, in base alla forma delle superfici che si affrontano, distinte in:

-

Seghettata: caratterizzata da margini ossei che possiedono sporgenze e rientranze che s'incastano tra loro.

-

Dentata: caratterizzata da margini ossei con sporgenze più fini rispetto a quelle della sutura seghettata e che spesso si espandono verso l'estremità libera.

-

Armonica: caratterizzata da margini ossei lisci.

-

Squamosa: caratterizzata da margini ossei tagliati a sbieco.

-

Limbica: caratterizzata da margini ossei tagliati a sbieco e reciprocamente seghettate.

-

Schindilesi: caratterizzata dalla cresta di osso che si adatta al solco di un osso adiacente.

Gonfosi

Le *gonfosi*, o *articolazioni a piolo-alveolo* o *alveolodentarie*, sono un tipo di articolazioni fibrose caratteristiche per la fissazione dei denti nelle proprie cavità alveolari.

La fissazione avviene grazie al collagene del peridonzio che connette il cemento del dente all'osso mandibolare o mascellare.

Sindesmosi

Le sindesmosi sono articolazioni fibrose in cui il mezzo congiungente le due ossa che vanno ad articolarsi è un legamento interosseo, una sottile corda fibrosa o una membrana aponevrotica. Esempio, l'articolazione radio-ulnare media.

Sincondrosi

Le sincondrosi sono caratterizzate dalla presenza, di un sottile strato di cartilagine che può, col tempo, essere sostituito da tessuto osseo, determinando la trasformazione della sincondrosi in sinostosi. Classici esempi di sincondrosi sono l'articolazione sterno-costale della prima costa e le varie articolazioni che si instaurano durante lo sviluppo di ossa lunghe tra epifisi e diafisi.

 Image 158

3.1 Gradi di libertà nella biomeccanica. Le articolazioni

83

Sinfisi

Le sinfisi presentano un disco fibrocartilagineo di connessione, le superfici articolari delle ossa a contatto con il disco fibrocartilagineo della sinfisi sono

rivestite da cartilagine ialina. Esempi sono la sinfisi pubica, l'articolazione tra i corpi delle vertebre e quella tra il manubrio e il corpo dello sterno.

Le sinartrosi non rivestono una grande importanza nell'analisi del movimento in quanto dotate in genere di scarsa mobilità.

Diartrrosi

Sono dispositivi giunzionali tra due capi ossei contigui. Questo tipo di articolazione permette un certo grado di mobilità alle ossa affrontate. I capi ossei sono rivestiti da cartilagine ialina la quale svolge la funzione di elemento elastico e rivestimento a basso coefficiente d'attrito. La cartilagine consta di tre strati di collagene (profondo, intermedio e superficiale).

Le diartrosi possono, inoltre, essere armoniche, con capi ossei aventi forme complementari, e disarmoniche nel caso contrario; in tal caso le discordanze sono eliminate tramite i menischi fibrocartilaginei. Questi permettono scambi nutritivi e una maggiore sollecitazione meccanica. Esternamente la capsula articolare, un manicotto fibroso, ricopre l'intera articolazione, fissandosi ai margini della cartilagine. All'interno si trova la membrana sinoviale che può essere: semplice se ridotta a un esile strato fibroso o complessa se spessa e ricca di cellule, vasi e nervi. L'articolazione è costituita anche da legamenti a distanza o periferici. Infine la cavità articolare è lo spazio presente tra i capi ossei e la capsula articolare. È ripiena di liquido sinoviale proveniente dal plasma sanguigno, arricchita con sostanze nutritive; le funzioni del liquido sinoviale sono molteplici: riduzione del coefficiente d'attrito, ammortizzazione dei carichi dinamici, lubrificazione, con la creazione di un contatto mediato che impedisce alle superfici cartilaginee di entrare in contatto diretto, riducendo quindi l'usura di queste superfici.

Fig. 3.1. a) Diartrosi; b) un giunto sinoviale

84

3 Le articolazioni

Con riferimento alla Fig. 3.1a, le diartrosi possono essere classificate come:
Artrosi

Le due superfici articolari sono pianeggianti e consentono solo movimenti di scivolo-lamento dei due capi articolari, esempi, i processi articolari delle vertebre.

Enartrosi (1)

I due capi ossei sono “sferici”, uno concavo e l’altro convesso e compiono movimenti angolari intorno a qualunque asse. Un esempio è l’articolazione coxo-femorale (articolazione dell’anca) che permette tre rotazioni intorno a tre assi ortogonali.

Condiloartrosi (2)

I due capi ossei sono ellissoidali uno concavo (cavità glenoidea) e l’altro convesso (condilo) e permettono un movimento angolare intorno a due assi ortogonali. Un tipico esempio è l’articolazione temporo-mandibolare. Per precisione questa è una diartrosi doppia formata da due articolazioni sovrapposte con interposto un disco completo che le separa. Sono una superiore (articolazione disco-fossa glenoide) e una inferiore (articolazione disco-condilo).

A sella (3)

I due corpi sono biassiali concavi e convessi a incastro reciproco. Si chiamano così perché le superfici articolari hanno la forma di una sella di cavallo concava longitudinalmente e convessa trasversalmente, come per esempio l’articolazione tra metacarpo e falangi. Permettono due rotazioni intorno ad assi ortogonali.

Ginglino laterale o trocoide (4)

I due capi ossei sono cilindri, uno cavo e uno pieno, con l’asse del corpo parallelo all’asse longitudinale delle ossa. Il movimento è rotatorio, per esempio l’articolazione prossimale tra radio e ulna.

Ginglino angolare o troclea (5)

I due corpi ossei sono cilindri con l’asse del cilindro perpendicolare all’asse del capo longitudinale delle ossa. Il movimento è angolare, ad esempio

l'articolazione del gomito.

Nel linguaggio della medicina il movimento non è mai riferito al segmento mobile, ma all'articolazione, si dirà quindi flessione dell'anca e non flessione del femore o della gamba, rotazione della spalla e non dell'omero. L'allontanamento dell'arto superiore dall'asse di simmetria del corpo sul piano frontale, sarà chiamato abduzione della spalla e non del braccio. Nel corpo le ossa possono avere una disposizione in serie, in parallelo o in gruppo. Nel primo caso, in biomeccanica, si parla di una catena cinematica. È il caso degli arti inferiori e superiori.

Movimenti elementari nella biomeccanica del corpo umano

Riprendendo i concetti trattati nel Capitolo 2, se un sistema è costituito da un certo numero di sezioni vincolate due a due (catena cinematica), il numero di gradi di libertà totali è dato dalle (2.3.1) e (2.3.3). Con riferimento alle articolazioni della Fig. 3 1,

 Image 159

3.1 Gradi di libertà nella biomeccanica. Le articolazioni

85

Fig. 3.2. Modello piano semplificato della gamba

un'enartrosi toglie tre gradi di libertà nel moto relativo dei due segmenti che collega, lasciandone tre, le tre rotazioni, un'articolazione a ginglino angolare o laterale ne toglie cinque lasciando solo la possibilità di una rotazione, un'articolazione condiloidea o a sella lascia libere due rotazioni cancellando quattro gradi di libertà.

Avremo quindi:

$$NGL = 6 * NB - 3 * NEN - 4 * NCOND - 5 * NGING .$$

(3.1.1)

Dove NB è il numero dei corpi, NGL quello dei gradi di libertà del sistema, NEN

il numero di enartrosi, NCOND quello di articolazioni a condilo o a sella, NGING

il numero di articolazioni a ginglino. Un esempio importante di sistemi articolati spaziali è quello delle articolazioni degli arti superiori e inferiori del corpo umano e del rachide. Si tratta in genere di giunti rotoïdali (l'articolazione dell'anca è, come abbiamo accennato, un giunto sferico, poiché la testa del femore, di forma sferica, si accoppia alla cavità dell'acetabolo, della stessa forma. Ambedue gli elementi sferici sono rivestiti da un materiale elastico e relativamente deformabile, la cartilagine, che ha lo scopo di attenuare le punte di sollecitazione dovute al trasferimento dei carichi dall'arto al tronco, attraverso il bacino. Se le superfici della testa del femore e dell'acetabolo a contatto strisciassero l'una sull'altra senza alcun lubrificante, si avrebbe una rapida usura delle superfici stesse, con conseguente danno funzionale nell'articolazione. Il liquido sinoviale abbassa fortemente il coefficiente d'attrito tra gli elementi a contatto e minimizza il calore prodotto per attrito.

Nel caso di moti piani, come in Fig. 3.2, la formula da applicare è la seguente: $NGL = 3 * NB - 2 * NCN$.

(3.1.2)

Dove con NCN si è indicato il numero di cerniere piane, di qualunque tipo di articolazione esse siano la semplificazione. È opportuno notare che ricondurre il funzionamento di un'articolazione a un modello geometricamente perfetto è una forte semplificazione. Nel ginocchio ad esempio l'asse della rotazione relativa della gamba rispetto al femore non è fisso ma dipendente dall'angolo di rotazione.

 Image 160

 Image 161

3 Le articolazioni

Fig. 3.3. La spalla:

- a) flesso-estensione;
- b) adduzione-abduzione;
- c) rotazione

I tre gradi di libertà della spalla

I tre gradi di libertà della spalla sono rappresentati nella Fig. 3.3. Per la descrizione dei movimenti ci riferiamo a una terna destra, solidale all'omero con l'asse X disposto secondo il suo asse longitudinale, l'asse Z perpendicolare a X nel centro dell'articolazione e in direzione medio-laterale, l'asse Y, in direzione anteroposteriore, perpendicolare ai primi due in modo tale da formare una terna destra. Il movimento elementare di flessione-estensione, corrisponde, per il sistema di riferimento adottato a una rotazione intorno all'asse Z, il movimento di abduzione-adduzione a una rotazione intorno all'asse anteroposteriore Y, il movimento di rotazione a una rotazione intorno all'asse X.

Occorre comunque notare che esistono altre due possibilità di movimento della spalla, il sollevamento-abbassamento e l'avanzamento-arretramento che operano sulla scapola variando la posizione dell'articolazione.

I due gradi di libertà del gomito

I gradi di libertà del gomito sono la flesso-estensione e la rotazione intorno all'asse dell'avambraccio (movimento di supinazione-pronazione). Non esiste per il carattere a sella dell'articolazione la possibilità di un consistente movimento di adduzione-abduzione.

Fig. 3.4. Gradi di libertà del gomito:

- a) flesso-estensione; b) rotazione

 Image 162

 Image 163

 Image 164

3.1 Gradi di libertà nella biomeccanica. Le articolazioni

87

Fig. 3.5. Una vista anteriore ed una posteriore della spalla destra (riprodotto su autorizzazione di OpenSim, SIMTK)

Gradi di libertà del polso

Sono presenti la flessione-estensione o flessione palmare e dorsale, quando la mano si piega verso l'avambraccio o nel senso opposto e la adduzione-abduzione radio-ulnare secondo che la mano tenda ad andare in direzione del radio o dell'ulna. I due movimenti sono rappresentati nella Fig. 3.6a,b.

La mano è un organo costituito da gruppi di ossa disposti in serie e in parallelo.

Trascuriamo la mobilità delle articolazioni tra carpo e metacarpo, a eccezione del pollice la cui articolazione tra carpo e metacarpo è una condiloartrosi con due gradi di libertà, flessione-estensione e adduzione-abduzione. Questo movimento del pollice permette l'opposizione del pollice stesso alla palma della mano nel movimento di presa. Ciascuna delle quattro articolazioni delle dita rimanenti tra metacarpo e falangi possiede due gradi di libertà, flessione-estensione del polso e adduzione-abduzione.

Restano le articolazioni delle falangi una per il pollice due per le dita rimanenti con un grado di libertà ciascuno. Nel complesso la mano presenta venti gradi di libertà, l'intero braccio ventisette.

Fig. 3.6. Movimenti del polso:

- a) flessione palmare e dorsale;
- b) abduzione-adduzione radio

ulnare

88

3 Le articolazioni

Z1

Y1

X

Y

1

1

Y

α

0

1

X0

Z2

Z0

Y2

X1

Y2

X2

X2

Y0

Z0

α_2

Fig. 3.7. Sistemi di riferimento spalla e

gomito

Esempio 3.1. Considerando lo schema della Fig. 3.7 s'immagini di compiere una flessione della spalla di 30° ruotando l'omero per sollevare il braccio, seguita da una flessione del gomito ancora di 30° . Si determini la posizione del centro del polso rispetto a un sistema inerziale posto alla base del tronco. Le coordinate dell'origine del sistema [1] rispetto a [0] sono:

[

]

{ - 27 }

$001 = [42] .$

0

La lunghezza dell'omero sia 34 cm, quella dell'avambraccio, 22 cm. La semplice osservazione dei sistemi di riferimento porta alle seguenti matrici di trasformazione:

[

]

[

]

0

0

- 1 - 27

c02 - s02 0 22

|

|

|

|

0

| - c01 s01

0

42 | 1

| s02 c02 0

0 |

1T = [s0

] 2T = [

].

(3.1.3)

1

c01

0

0

0

0

1

0

0

0

0

1

0

0

0

1

Ponendo:

$$c1 = \cos \theta_1$$

$$s1 = \sin \theta_1$$

$$c2 = \cos \theta_2$$

$$s2 = \sin \theta_2$$

$$c12 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2).$$

La matrice globale di rotazione è:

$${}^0\mathbf{T} = {}^0\mathbf{T} * {}^1\mathbf{T} =$$

2

1

2

[

] [

]

0

0

- 1

- 27

0

0

- 1 - 27

|

| - c

||

| . (3.1.4)

12

s12

0

- 34 * c1 + 42

- 0,5 0,87 0 12,56

┌

||

|

s

└ = ┌

└

12

c12

0

34 * s1

0,87

0,5

0

17

0

0

0

1

0

0

0

1

Si ha quindi per la posizione del polso:

{ } {

}

|

|

-

{ 22 |

|

{ |

|

{ 27 |

|

{

0

1,55

$OP = 0$

=

.

$2T * |$

(3.1.5)

|

{ 0 |

|

J |

|

{ 36,06 |

|

J

1

1

3.1 Gradi di libertà nella biomeccanica. Le articolazioni 89

Un metodo diverso per determinare le matrici di trasformazione è di partire dal sistema di base e determinare quali trasformazioni hanno portato dal sistema [0] fisso a quello mobile [1]. Nel nostro caso nell'ordine si ha:

•

una traslazione dell'origine del sistema mobile da O_0 a O_1 ;

•

una rotazione intorno all'asse Y , di un angolo -90° ;

•

una rotazione intorno a un'asse Z mobile di -90° ;

•

una rotazione intorno all'asse Z mobile di 0° .

Il prodotto matriciale che rappresenta la sequenza è il seguente:

[

][

][

]

1

0

0

-27

0

0 - 1 0

0

1

0

0

|

||

||

|

0

| 0 1 0

42 || 0 1 0 0 || - 1 0 0 0 |

1T = [0 0 1

0

] * [1 0 0 0] * [0 0 1 0] *

0

0

0

1

0

0

0

1

0

0

0

1

[

]

c01

- s01 0 0

|

|

* | s01

c01

0

0

L

|

0

0

1

$0 \rfloor$.

(3.1.6)

0

0

0

1

Il risultato è identico a quello trovato per ispezione.

L'ordine delle matrici dipende dal tipo di trasformazione che la singola matrice rappresenta. Considerando l'Esempio 3.1, relativo all'arto superiore, nel passare dal sistema di base a quello della spalla, quindi a quello del gomito e infine al polso non facciamo altro che aggiungere gradi di libertà alla catena cinematica. L'espressione ottenuta per la matrice globale che lega il sistema n-esimo a quello di base è.

0

$nT = 0$

$1T * 1$

$2T * \dots * n - 1$

n

T.

Ricordiamo ancora che un movimento intorno ad assi mobili comporta postmultiplicazione, intorno ad assi fissi premultiplicazione. La matrice che rappresenta il movimento deve essere inserita nel prodotto subito dopo di quella che rappresenta il sistema di assi cui il movimento si riferisce. Si supponga ad esempio che dopo avere calcolato la matrice $0T$ tutto il corpo subisca una rotazione intorno all'asse Z

2

0 di 90 °.

Avremo allora:

[

]]

]

0 - 1 0 0

0

0

- 1 - 27

|

||

|

0

0

| 1 0 0 0 || - 0,5 0,87 0 12,56 |

2TZ, 90 2T = [0

0

1 0] [0,87 0,50

0

17

]=

0

0

0 1

0

0

0

1

[

] [

]

0,50 - 0,867

0

- 12,56

0

0

- 1 - 27

|

||

|

= | 0

0

- 1,00 - 27,00

- c01 s01

0

42

|

||

|

0,87

0,50

0

17

] = [s0

].

1

c01

0

0

0

0

0

1.00

0

0

1

(3.1.7)

90

3 Le articolazioni

La nuova posizione del polso è quindi.

[

] [] [

]

0,5000 - 0,8660

0

- 12,5551 | 22 | | - 1,56 |

|

||

} |

1 |

}

|

}

0

0

0

- 1,0000 - 27,0000

0

- 27

O

|

|

P = [

=

.

0,87

0,5

0

17

$$\begin{array}{l}
 J | \\
 | \\
 \{ 0 | \\
 | \\
 J | \\
 | \\
 \{ 36,06 | \\
 | \\
 J \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 1,0000 \\
 1 \\
 1
 \end{array}$$

(3.1.8)

Il risultato dell'operazione scambia, come era prevedibile, i valori delle coordinate x e y del polso, mentre la z resta invariata. Il risultato può essere esteso a traslazioni o rotazioni di sistemi che non coincidono con l'ultimo sistema ottenuto e con quello di base. Se, dopo avere ottenuto una matrice che lega il sistema [n] al sistema [0], intendiamo compiere una rotazione di θ rispetto a un asse X_i di un generico sistema

[i], dovremo inserire la matrice che rappresenta la rotazione immediatamente dopo la matrice $i - 1T$. Si avrebbe quindi:

0

$nT = 0$

$1T1$

$2T \dots i - 1$

$i T i + 1 T \dots n - 1 n T = 0 i T i n T .$

(3.1.9)

Premoltiplicando ambedue i membri dell'equazione precedente per $i T$ riportiamo 0

la terna (i) a coincidere di nuovo con gli assi fissi. A questo punto possiamo ancora premoltiplicare per la matrice $T X i , 0$ compiendo la rotazione rispetto all'asse $X i$ di (i), diventato a questo punto sistema di base. Per cancellare la rotazione $i T$

0

premultiplichiamo ancora per $0 i T$, ottenendo:

0

$i T * T X i , 0 * i 0 T 0$

$i T i n T = 0$

$i T * T X i , 0 * i n T .$

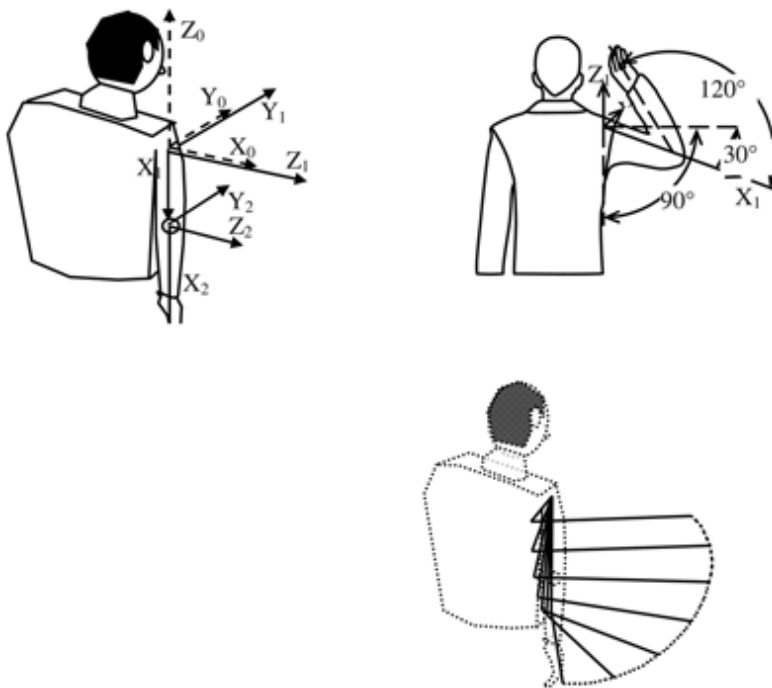
(3.1.10)

Che mostra come la matrice di rotazione vada inserita nella sequenza.

Traiettorie

La determinazione di traiettorie di punti rilevanti del nostro corpo, in particolare degli arti superiori o inferiori, richiede soltanto la determinazione della matrice di trasformazione che lega il sistema di riferimento fisso a quello del segmento interessato, cui appartiene il punto in esame. Si consideri ad esempio l'arto superiore e si voglia determinare la traiettoria del centro del polso per una determinata variazione degli angoli dei giunti. Con riferimento alla Fig. 3.8, abbiamo riportato il sistema fisso $X_0Y_0Z_0$ e quello mobile, $X_1Y_1Z_1$ con la stessa origine del primo, nel centro dell'articolazione della spalla, e un altro, mobile, solidale all'avambraccio, con origine nel gomito. È stata rispettata la convenzione di Denavit-Hartenberg ponendo l'asse X_1

lungo l'omero, Z_1 come asse di flessione della spalla, Z_2 lungo l'asse di flessione del gomito. Si è immaginato di far compiere alla spalla tre rotazioni intorno ai tre assi, di 0 per la rotazione dell'omero intorno a Z_0 , 1 per la rotazione intorno a Y_1 , 2 per Z_1 . A queste rotazioni ne segue una dell'angolo 3 intorno all'asse Z_2 , che simula la flessione del gomito. Chiaramente il sistema [1] segue l'omero durante il suo movimento. La matrice del braccio è il prodotto della matrice di passaggio dal sistema [0]



3.1 Gradi di libertà nella biomeccanica. Le articolazioni

a) b)

Fig. 3.8. Analisi della traiettoria: a) sistema di riferimento; b) movimenti del braccio; c) traiettoria del polso

c)

a [1] e di quelle che rappresentano le quattro rotazioni, cioè:

[

]

]

]

0

0 1 0

1

0

0

0

cos 1

0 cos 1 0

|

||

||

|

0

| 0 1 0 0 || 0 cos0 - sin0 0 ||

0

1

0

0 | *

2T = |

L

||

||

|

- 1 0 0 0] [0 sin0 cos0 0] [- sin1 0 cos1 0]

0

0 0 1

0

0

0

1

0

0

0

1

┌

└┘

└

cos 2 - sin 2 0 0

cos 3 - sin 3 0 11

|

||

|

* | sin2 cos2 0 0

sin 3

cos 3

0 0

|

||

|.

$\begin{bmatrix}$ \parallel \mid

(3.1.11)

 0 0 $1 \ 0 \] \]$ 0 0 $1 \ 0 \]$ 0 0 $0 \ 1$ 0 0 $0 \ 1$

Per ottenere la posizione del centro del polso corrispondente a un punto della traiettoria, è sufficiente inserire i valori degli angoli nelle matrici e svolgere le moltiplicazioni. La posizione del polso è data, rispetto al sistema di base dalla relazione:

 \lceil \lceil

1

0

0 1 0

1

0

0

0

|

||

|

0

0

1 0 0

0 cos 0 - sin 0 0

P

|

||

|

polso = 0

$2T2P_{polso} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 0 \end{bmatrix}$

cos 0

0] *

0

0 0 1

0

0

0

1

┌

└┘

└

cos 1

0 cos 1 0

cos 2 - sin 2 0 0

|

||

|

* |

0

1

0

0

sin 2

cos 2

0 0

[

||

|

- sin1 0 cos1 0] [0

0

1 0] *

0

0

0

1

0

0

0 1

[

] []

$$\cos^3 - \sin^3 \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

$$| \text{lav} |$$

|

||

{ |

†

$$* | \sin^3 \cos^3 \quad 0 \quad 0$$

0

L

|

.

(3.1.12)

0

0

1 0] |

|

{ 0 |

|

J

0

0

0 1

1

Nelle relazioni precedenti si sono indicate con l_1 la lunghezza dell'omero e con l_{av} la lunghezza dell'avambraccio, che rappresenta anche la posizione del centro del polso

 Image 166

92

3 Le articolazioni

rispetto al sistema [2]. Ricordiamo ancora che la successione delle matrici nel prodotto non è indifferente ai fini del risultato. Sappiamo che sequenze diverse delle stesse rotazioni conducono a risultati diversi. Occorre quindi avere chiaro in mente quale sequenza si vuole simulare.

Poiché in generale non interessa un solo punto, ma una serie, corrispondente a tutta l'escursione del movimento, è possibile applicare due procedure distinte. La prima è basata sul calcolo della matrice del braccio in forma simbolica. Questo lavoro può essere svolto a mano oppure si può ricorrere a strumenti di calcolo simbolico, presenti in molti pacchetti di calcolo matematico, come Matlab, Mathematica etc. Sulla matrice globale ottenuta è sufficiente sostituire i valori degli angoli nei successivi istanti temporali, per ottenere i punti della traiettoria cercati. La seconda procedura è basata sulla valutazione numerica delle singole matrici prima della moltiplicazione. La scelta della prima o della seconda procedura dipende dalle condizioni e dagli strumenti disponibili. Nell'esempio riportato in appendice, si è supposto di svolgere un movimento del braccio, rappresentato, con riferimento al sistema di assi della Fig. 3.8, da un'abduzione della spalla di 90° , corrispondente ad un angolo beta pari a

– 90° intorno a un asse orizzontale Y_1 , un angolo alfa eguale a zero (nessuna rotazione dell'omero intorno al suo asse longitudinale), un angolo gamma di -30° rispetto a un'asse Z_1 anch'esso mobile, mentre il gomito

flette di 120° . Per trovare la traiettoria del polso si è ricorso a MATLAB, scomponendo i tre movimenti in incrementi piccoli. Il codice MATLAB è riportato nell'appendice.

I movimenti elementari dell'arto inferiore

Richiamiamo brevemente nel seguito le nozioni anatomiche e fisiologiche per poter impostare un'analisi modellistica, seppur semplificata dell'arto inferiore.

Articolazione dell'anca

L'articolazione coxofemorale assume notevole importanza, sia agli effetti statici che dinamici. La pelvi appoggia bilateralmente sulle teste femorali. il funzionamento dell'appoggio è legato al perfetto centraggio dell'articolazione, ossia a un'esatta geometria a) b) c) **Fig. 3.9.** I movimenti dell'anca: a) flessione-estensione; b) rotazione interna-esterna; c) abduzione-adduzione

3.1 Gradi di libertà nella biomeccanica. Le articolazioni 93

tra i capi articolari. Come tutte le enartrosi, quella coxo-femorale è molto mobile, per quanto in misura minore rispetto alla scapolo-omerale. L'articolazione dell'anca opera, infatti, principalmente a sostegno del tronco, durante i movimenti della deambulazione. L'articolazione possiede tre gradi di libertà di rotazione, cui corrispondono i movimenti di flessione-estensione, intorno a un asse trasversale, di abduzione-adduzione intorno a un asse antero-posteriore, di rotazione interna ed esterna intorno all'asse longitudinale del femore. Ciascuno di questi movimenti è limitato anatomicamente dalle possibilità di estensione dei legamenti interessati.

Estensione e flessione

L'asse trasversale del movimento di flessione-estensione sfiora l'apice del grande trocantere e attraversa l'inserzione laterale del legamento rotondo. L'ampiezza massima dell'escursione flessoria corrisponde a circa 120° ; l'estensione è assai più limitata e raggiunge un angolo massimo di circa 15° . Il movimento di estensione è arrestato dai legamenti ileo-femorale e pubo-femorale. I movimenti di flessione ed estensione possono essere compiuti sia

con l'articolazione del ginocchio estesa che inflessa. La flessione dell'anca raggiunge limiti più ampi con il ginocchio flesso.

Abduzione e adduzione

Dei movimenti di abduzione e adduzione il primo è più ampio e riveste importanza maggiore. L'escursione totale di questo movimento è di circa 80 ° ed è massima con l'anca in lieve flessione e rotazione esterna; il legamento rotondo vale a limitare soprattutto il movimento di adduzione che non supera i 30 °. La massima escursione del movimento di abduzione si ottiene con la spaccata frontale, con angoli di 90 °, ottenuti dai ginnasti con adeguato allenamento.

Rotazione esterna e interna

Il movimento di rotazione si svolge intorno a un asse che passa per il centro della testa del femore, raggiungendo il punto centrale dell'epifisi inferiore, tra i condili.

L'escursione totale di questo movimento, in stazione eretta, corrisponde a 50–60 °; è maggiore quando l'anca è in flessione. I movimenti elementari descritti possono essere composti per realizzare un movimento di circonduzione. Dopo la spalla, l'anca è il più mobile dei giunti del nostro corpo.

Articolazione del ginocchio

Dovremmo innanzitutto ricordare che, a ginocchio esteso, l'asse del femore forma, con quello della gamba, un angolo aperto lateralmente di 175 ° (valgismo fisiolo-gico del ginocchio). L'articolazione possiede due gradi di libertà cui corrispondono i movimenti elementari di flesso-estensione e rotazione. *La flesso-estensione* si svolge intorno a un asse trasversale che passa per i condili femorali. L'escursione, dall'estensione alla flessione massima, ottenuta con le sole forze muscolari, si aggira sui 120–140 ° ed è condizionata dalla posizione dell'anca. Se la flessione è forzata tramite l'applicazione di forze esterne, si possono guadagnare ancora circa 30 °.

 Image 167

3 Le articolazioni

Fig. 3.10. Movimenti del ginocchio: a) flessione-estensione; b) rotazione esterna-interna

Il movimento relativo dei condili femorali sul piatto tibiale durante la flessione del ginocchio non è un moto di rotolamento puro, ma di rotolamento con strisciamento, guidato e limitato dai legamenti crociati.

La rotazione del ginocchio, esterna e interna, avviene intorno a un asse passante per la tibia. Il movimento è molto limitato a ginocchio esteso. Nel ginocchio in estensione i legamenti crociati si oppongono alla rotazione interna; i legamenti collaterali e i menischi, specialmente quello laterale, limitano l'extrarotazione. A ginocchio inflesso a 90° , è possibile ottenere una rotazione interna massima di $30-35^\circ$ e una rotazione esterna massima di $40-45^\circ$.

Articolazione tibiotarsica

L'articolazione tibiotarsica ha il ruolo principale di scaricare il peso del corpo sulle arcate plantari. Il tarso è un sistema costituito da sette ossa, astragalo, calcagno, sca-foide, cuboide e le tre ossa cuneiformi, articolate in modo tale da formare una cavità, rivolta verso il basso. In senso strutturale il tarso, insieme al metatarso, forma una volta a doppia curvatura. La sua struttura permette di sopportare i carichi elevati dovuti al peso del corpo sovrastante e i sovraccarichi dinamici. La stabilità dell'equilibrio che, in altre articolazioni, è mantenuta in primo luogo da resistenze legamentose, necessita del continuo impegno dei muscoli gastrocnemio e soleo. Nell'articolazione sono possibili i movimenti di:

Flesso-estensione intorno a un asse trasversale

Il movimento realizza una flessione dorsale di 20° e plantare di 30° . Nell'articolazione tibioastragalica sono completamente bloccati i movimenti di altra natura essendo l'astragalo fermato nella pinza tibio-fibulare con l'aiuto di un robusto complesso legamentoso. La pinza può modicamente

allargarsi o restringersi grazie all'elasticità dell'articolazione; così essa si adatta al volume d'incastro dell'astragalo che ruota al suo interno, durante i movimenti articolari. Eventuali violenti spostamenti passivi, rotatori e trasversali dell'astragalo, provocano la rottura della giunzione fibroelastica tibio-fibulare, la rottura dei legamenti collaterali, oppure la frattura dei malleoli.

Eversione-inversione con prono-supinazione e adduzione-abduzione

L'astragalo è articolato al calcagno e, anteriormente, all'osso navicolare.

Non è de-

 Image 168

 Image 169

 Image 170

 Image 171

 Image 172

 Image 173

 Image 174

 Image 175

 Image 176

 Image 177

 Image 178

 Image 179

 Image 180

 Image 181

 Image 182

 Image 183

■

 Image 185

 Image 186

 Image 187


 Image 188

 Image 189

 Image 190


 Image 191

 Image 192

 Image 193

 Image 194

 Image 195

 Image 196

 Image 197

 Image 198

 Image 199

 Image 200

 Image 201

 Image 202

 Image 203

 Image 204

 Image 205

 Image 206

 Image 207

 Image 208

 Image 209

 Image 210


 Image 211

 Image 212

 Image 213

 Image 214

 Image 215

 Image 216

 Image 217

 Image 218

 Image 219


 Image 220

 Image 221

 Image 222

 Image 223

 Image 224

 Image 225


 Image 226

 Image 227

 Image 228

 Image 229


 Image 230

 Image 231

 Image 232

 Image 233

 Image 234

 Image 235

 Image 236

 Image 237

 Image 238

 Image 239

 Image 240

 Image 241

 Image 242

 Image 243

 Image 244

 Image 245

 Image 246

 Image 247

 Image 248

 Image 249

3.1 Gradi di libertà nella biomeccanica. Le articolazioni

95

a)

b)

$41 \pm 9^\circ$

$23 \pm 11^\circ$

c)

d)

Fig. 3.11. Movimenti elementari della caviglia: a) flessione plantare e dorsale; b) eversione (con pronazione)-inversione (con supinazione); c) asse dell'articolazione subtalare (vista dall'alto); d) asse dell'articolazione subtalare (vista mediale) finibile un unico asse intorno al quale si svolge il movimento relativo. L'inversione con adduzione, supinazione e modica flessione porta il piede a ruotare verso il piano mediale. L'eversione è accompagnata da abduzione, pronazione e modica estensione. Questi movimenti sono d'importanza capitale per una corretta deambulazione, perché permettono al piede di ruotare sotto carico trasferendo l'area di contatto dal calcagno dove avviene la fase iniziale del contatto, alla prima falange, ultima area a contatto, prima del distacco del piede. Il piede, come

gli altri segmenti dell'arto inferiore, svolge compiti sia statici sia dinamici. Nella stazione eretta, il piede poggia sul suolo con tre punti scheletrici e cioè:

-

un *appoggio anterointerno* che corrisponde alla testa del 10 ° osso metatarsale e alle sue ossa sesamoidi; un *appoggio anteroesterno* che corrisponde alla testa del 4 ° e 5 ° metatarsale;

-

un *appoggio posteriore*, sulla tuberosità posteriore del calcagno.

Per quanto riguarda la deformazione della volta plantare:

-

nella prima fase, d'appoggio del piede sul tallone, non si ha variazione alcuna;

-

nella seconda fase, di appoggio totale, la volta si distende sotto il carico gravitazionale;

-

nella terza fase, mentre si solleva il tallone e si sposta l'appoggio sull'avampiede, la volta plantare tende a diminuire la sua curvatura a causa delle forze agenti sul calcagno e l'avampiede.

 Image 250

96

3 Le articolazioni

Fig. 3.12. Un modello piano dell'arto inferiore

3.2 Un modello cinematico piano dell'arto inferiore

La Fig. 3.12, rappresenta un modello semplificato piano dell'arto inferiore, in cui i sistemi di riferimento sono stati applicati ai tre segmenti secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg. La figura mostra come devono essere valutati gli angoli tra i diversi assi X, nei tre sistemi di riferimento. Si parte dall'asse di riferimento e si ruota in senso antiorario sino a incontrare l'asse mobile. La matrice che rappresenta i movimenti della gamba deve essere costruita in base alle esigenze del modello.

Se, ad esempio, sono presenti soltanto movimenti di flessione-estensione dell'anca, del ginocchio e della caviglia, si potrà in prima approssimazione, considerare il modello piano con solo tre gradi di libertà.

Un'altra osservazione riguarda la costruzione della matrice 0T che lega il sistema-

3 ma solidale alla caviglia e quello fisso, con origine nell'articolazione dell'anca. Se partiamo da questa, è evidente che la mobilità dell'anca (rappresentata in questo modello semplificato con un solo grado di libertà invece dei tre canonici) porta a una matrice di sola rotazione in quanto il sistema mobile solidale al femore ha la stessa origine del sistema fisso. Il secondo grado di libertà, quello del ginocchio, comporta una matrice di rototraslazione con rotazione intorno a Z2. Analogamente il grado di libertà nella caviglia comporta un'altra matrice di rototraslazione. Il risultato finale è dato dal prodotto:

[

T

T

]

$c_1 - s_1 \ 0 \ 0$

$c_2 - s_2 \ 0 \ 1$

c03 - s03 0 12

|

||

||

|

0

| s01 c01 0 0 || s02 c02 0 0 || s03 c03 0 0 |

3T = [0

0

1 0] [0

0

1 0] [0

0

1 0] =

0

0

0 1

0

0

0 1

0

0

0 1

[

]

$c_{0123} - s_{0123} \ 0 \ l_1 c_{01} + l_2 c_{012}$

|

|

$= | \ s_{0123} \ c_{0123} \ 0 \ l_1 s_{01} + l_2 s_{012}$

L

|

0

0

1

0

].

(3.2.13)

0

0

0

1

Con l_1, l_2 lunghezze del femore e della tibia e $012 = 01 + 02$ e $0123 = 01 + 02 + 03$

Il risultato è formalmente identico a quello ottenuto per il modello dell'arto supe-

 Image 251

3.2 Un modello cinematico piano dell'arto inferiore

97

Fig. 3.13. Analisi del cammino (riprodotto su autorizzazione di OpenSim, SIMTK) riore. È opportuno sottolineare il carattere estremamente semplificato del modello costruito.

Modelli più complessi e meglio rispondenti alla realtà anatomica e fisiologica possono essere sviluppati all'interno di ambienti di modellazione specifici per queste applicazioni. Uno di questi è OpenSim SIMTK, basato sulle leggi fondamentali della meccanica e capace di risolvere problemi di cinematica e dinamica, dirette e inverse. Nell'ambiente OpenSim, Fig. 3.13, è possibile utilizzare modelli degli arti inferiori o superiori, singoli o accoppiati, per analizzare e simulare movimenti partendo da dati sperimentali, allo scopo di valutare la correttezza della postura, le azioni muscolari e le forze scambiate col terreno. Le leggi di comportamento dei muscoli sono basate sul modello di Hill, con alcuni aggiornamenti derivanti dalle ricerche più moderne.

 Image 252

4

I muscoli scheletrici

I muscoli scheletrici sono gli attuatori del nostro corpo, perché generano forze che, agendo tra una sezione e l'altra dello scheletro, provocano il movimento relativo di queste. Se il corpo è in contatto col terreno o

comunque con un supporto stazionario, le azioni muscolari generano reazioni “esterne” rispetto al sistema corporeo, quindi capaci di provocare effetti globali su questo. Le azioni muscolari agiscono in coppia, per cui, se un muscolo ha i tendini collegati a due segmenti scheletrici A e B, l’effetto prodotto è quello di un movimento relativo di queste sezioni, mentre dal punto di vista dell’intero sistema corporeo, le forze agenti devono essere considerate interne e con risultante nulla, quindi incapaci di provocare una variazione della quantità di moto del corpo nel suo insieme. I muscoli scheletrici sono attivi anche quando il corpo non è in movimento, per garantire la stabilità di un sistema per sua natura instabile. Lasciando al seguito la trattazione del comportamento dei muscoli scheletrici e la descrizione del classico modello di Hill, che ha dominato questo settore della biomeccanica per lungo tempo, descriveremo brevemente i muscoli scheletrici dell’arto inferiore, divisi per gruppi, secondo le funzioni svolte. Le immagini che seguono sono tratte, con poche modifiche, da OpenSim. È appena necessario osservare che, poiché quello che interessa nel nostro caso sono le forze generate, i muscoli sono rappresentati con semplici linee che collegano i punti d’inserzione. Rimandando quindi all’anatomia per una completa descrizione morfologica, richiamiamo qui i principali gruppi, divisi per funzione.

L’azione muscolare può essere attiva o passiva. La contrazione prende il nome di contrazione concentrica nel primo caso, eccentrica nel secondo. Nel primo caso il muscolo contraendosi accorcia la distanza tra i suoi estremi, nel secondo caso, pur stimolato a contrarsi, trova ai suoi capi forze maggiori che glielo impediscono. In questo caso, quello di contrazione eccentrica, il muscolo agisce come freno, in opposizione a forze maggiori di quelle generate. Nella contrazione concentrica il muscolo si accorcia effettivamente, perché le resistenze ai suoi capi sono inferiori alle forze generate, nella contrazione eccentrica il muscolo subisce un allungamento. I muscoli sono attivati e controllati da nervi volontari. La contrazione muscolare è generata da un complesso processo metabolico che porta all’emissione di stimoli elettrici, *twitch*, di frequenza variabile. A ciascuno stimolo corrisponde una contrazione. Se la fre-Picasso B.: Fondamenti di Meccanica e Biomeccanica. Meccanica dei corpi rigidi articolati.



100

4 I muscoli scheletrici

quenza degli stimoli è abbastanza alta (*attivazione tetanica*) il muscolo raggiunge il valore massimo di forza generabile. Il muscolo come attuatore può essere pensato come generatore di forza pura o di forza e spostamento. Se ai capi del muscolo è presente una coppia di forze resistenti, l'azione volontaria prevista può essere quella di raggiungere una condizione di equilibrio statico, oppure di provocare il movimento, fornendo una forza attiva superiore alla resistenza. Per esempio, se il nostro avambraccio forma un angolo di 90° con l'omero e cerchiamo di sostenere un peso restando in questa posizione, i muscoli attivi (bicipite, brachiale e brachioradiale) dovranno fornire la forza giusta per l'equilibrio. Se invece, vogliamo flettere ancora il gomito, sollevando il peso, le forze generate dovranno essere superiori. Secondo le ricerche su questo tema, il muscolo scheletrico si comporta come un dispositivo a potenza costante, cioè il prodotto della forza generata per la velocità della contrazione può essere considerato costante.

Flessione-estensione dell'anca

I flessori e gli estensori dell'anca sono riportati nella Fig. 4.1. Poiché molti muscoli cooperano nello svolgimento della stessa funzione, è importante sapere come avvenga questa cooperazione. A questo riguardo sono state formulate molte ipotesi, non sempre confortate da risultati sperimentali. Una di queste postula che il nostro corpo operi cercando di minimizzare la produzione di forza e l'energia relativa. L'ipotesi esposta è alla base di metodi matematici volti al calcolo delle forze prodotte dai singoli muscoli, cooperanti in un gruppo. Altre teorie sostengono che, più che la somma delle forze generate, il corpo tenda a minimizzare l'energia. Altre ancora che la forza massima prodotta da un muscolo generico possa esprimersi come prodotto di uno **Fig. 4.1.** Muscoli flessori ed estensori dell'anca (riprodotto su autorizzazione di OpenSim, SIMTK)



Fig. 4.2. Rotazione interna a) ed esterna b) dell'anca (riprodotto su autorizzazione di OpenSim, SIMTK)

sfuerzo @, costante per tutti i muscoli, per l'area convenzionale della sezione retta, calcolata come rapporto tra il volume del muscolo e la sua lunghezza utile (PCSA, Physiological Cross Section Area). Data la difficoltà delle misure sperimentali, rilevare il potenziale elettrico di attivazione di un singolo muscolo è un'impresa assai ardua, per la difficoltà di discriminare il segnale interessato da altri provenienti dai diversi muscoli attivi insieme a quello in esame.

Rotazione dell'anca

Nelle Fig. 4.2 sono rappresentati i principali muscoli delegati alla rotazione interna (a sinistra) e rotazione esterna (a destra) dell'anca. Ricordiamo che l'articolazione coxo-femorale è costituita da un giunto sferico nel quale la testa emisferica del femore s'impegna nell'acetabolo. L'articolazione coxo-femorale è sollecitata da forze rilevanti, in quanto, in alcune condizioni come la corsa e il salto, il carico massimo tra i due membri della coppia può arrivare a valori di 5–8 volte il peso corporeo. Questo è possibile grazie alla cedevolezza della cartilagine che riveste la cavità dell'acetabolo, che si comporta come un materiale viscoelastico. Sono frequenti fenomeni di degrado dei materiali, dovuti a cause patologiche o traumatiche, che ne possono minare l'efficienza e la capacità di sopportare senza danni carichi elevati.

Flesso-estensione del ginocchio

I muscoli attivi nella flesso-estensione del ginocchio sono riportati in Fig. 4.3. Nell'estensione è evidente il ruolo di collettore di forza giocato dalla rotula, che riunisce tutti i capi del quadricipite e trasmette la forza risultante al legamento patellare. Per la flessione è da notare che sia il gastrocnemio, costituito in realtà da due muscoli identici che il sartorio e il bicipite femorale sono muscoli che superano due articolazioni.

L'estensione del ginocchio nella stazione eretta richiede grande potenza muscolare in quanto è un'operazione anti-gravitazionale.

 Image 255

 Image 256

 Image 257

102

4 I muscoli scheletrici

Fig. 4.3. Flessione a) ed estensione b) del ginocchio (riprodotto su autorizzazione di OpenSim, SIMTK)

Flesso-estensione della caviglia

Le immagini della Fig.4.4, mostrano i muscoli che attivano la flessione e l'estensione della caviglia. La flessione della caviglia è fondamentale per la deambulazione. La flessione plantare genera, infatti, l'azione propulsiva che spinge il corpo in avanti.

Le forze elevate che si sviluppano nel tricipite della sura si scaricano sul tendine d'Achille, una delle parti più sollecitate del nostro corpo. Nel salto e nella corsa questi muscoli sono legati alla nostra potenza propulsiva.

2

1

1-Gastro mediale

1-Estensore digitale

2-Gastro laterale

1

2-Tibiale anteriore

3-Peroneo lungo

5

3-Tibiale posteriore

7

4-Peroneo breve

2

4-Peroneo

5-Flessore alluce

5-Estensore alluce

6-Flessore digitale **8**

7-Soleo

3

5

4

4

4

a)

b

b)

3

)

5

6

Fig. 4.4. Flessione plantare a) e dorsale b) della caviglia (riprodotto su autorizzazione di OpenSim, SIMTK)

 Image 258

 Image 259

4 I muscoli scheletrici

103

Flesso-estensione del gomito

La flessione del gomito è governata dai muscoli bicipite, brachiale e brachioradiale. Il bicipite agisce sia nel movimento della spalla che in quello del gomito, perché il suo capo breve ha origine nelle strutture della scapola, il capo lungo ha origine dal tubercolo sopraglenoideo della scapola. I due fasci si uniscono distalmente, a circa 7 cm dall'articolazione del gomito. All'altro estremo il bicipite si inserisce nella tuberosità del radio. Il caratteristico rigonfiamento del muscolo è dovuto all'unione dei due ven-tri muscolari. Il muscolo brachiale origina dalla superficie anteriore della parte media e distale della diafisi dell'omero, con le fibre più prossimali che prendono origine appena sotto e attorno all'inserzione del deltoide sulla tuberosità deltoidea dell'osso. Il suo ventre muscolare è fusiforme e largo, le sue fibre si portano infero-medialmente e si inseriscono sulla superficie anteriore del processo coronoideo dell'ulna e sulla tuberosità ulnare mediante uno spesso tendine. Può essere parzialmente fuso con muscoli che gli sono vicini come il brachioradiale o il bicipite. Funge da flessore per l'articolazione del gomito.

Estensione del gomito. Il muscolo tricipite è il principale muscolo del compartimento posteriore del braccio. Il suo nome deriva dalla sua caratteristica di possedere tre origini tendinee. Il capo mediale è il più esteso

ed origina dalla parte media e distale della superficie posteriore della diafisi dell'omero, il capo laterale origina dal setto intermuscolare laterale e da una cresta ossea posta sulla superficie posteriore della parte prossimale della diafisi dell'omero, mentre il capo lungo origina dalla parte superiore del margine mediale della scapola, appena sotto il tubercolo infraglenoideo.

Le fibre del capo mediale e laterale scendono inferiormente, quelle del capo lungo infero-lateralmente. Tutte si fondono in unico e spesso ventre muscolare che scende inferiormente e le cui fibre nella porzione distale dell'omero si portano medialmente a formare un robusto tendine che si inserisce sull'olecrano dell'ulna.

1

2

4

3 5

1

3

2

6

Fig. 4.5. Flessione ed estensione del gomito (riprodotto su autorizzazione di OpenSim, SIMTK): 1) tricipite lungo; 2) tricipite mediale; 3) tricipite laterale; 4) bicipite lungo; 5) bicipite corto; 6) brachiale

 Image 260

104

4 I muscoli scheletrici

4.1 Struttura e modelli di comportamento del muscolo scheletrico

L'ispezione a occhio nudo e quella microscopica portano a individuare le strutture anatomiche che compongono un muscolo scheletrico. Il microscopio elettronico ha una risoluzione teorica di 0,002 nm, in pratica 0,2 nm. Ciò che vediamo incrementando gradualmente la risoluzione è mostrato nella Fig. 4.6. L'unità di base del muscolo è la fibra muscolare, che è una singola cellula, polinucleata. Le fibre sono raggruppate in *fascicoli* di varie dimensioni all'interno del muscolo. Lo spazio lasciato libero tra una fibra e l'altra, all'interno di un fascicolo, è occupato da tessuto connettivo. Ogni fascicolo è, a sua volta, fasciato da un involucro di tessuto connettivo più resistente.

L'intero muscolo è circondato da un involucro di tessuto connettivo ancora più robusto. Le fibre muscolari hanno diametri che variano tra 10 e 60 μm e lunghezze da qualche mm a diversi cm. Nei muscoli lunghi si possono raggiungere lunghezze di 30 cm. Le fibre muscolari vanno da un capo all'altro del muscolo, o ne attraversano solo parte, terminando in tessuto connettivo o tendineo. Il nucleo appiattito della fibra muscolare si trova immediatamente sotto la membrana cellulare. Il citoplasma si divide in senso longitudinale in fili o *miofibrille*, di circa 1 μm di diametro. All'ind-

Fig. 4.6. Struttura del muscolo scheletrico (Wikimedia Creative Commons)

4.2 Il meccanismo contrattile

105

gine microscopica, in luce polarizzata, con l'uso di coloranti, appaiono striate (da questo il nome di tessuto muscolare *striato*). Alcune zone si colorano debolmente e ruotano il piano di polarizzazione in misura modesta. Sono le bande isotrope, bande I. Altre, alternate rispetto alle prime, si colorano intensamente e ruotano fortemente il piano di polarizzazione. Sono le bande anisotrope, o bande A. Le bande isotrope sono bisecate da una linea sottile, che assume anch'essa una colorazione. Si tratta delle bande Z. Le bande isotrope sono anch'esse attraversate da una linea debolmente colorata, la banda H. Le zone descritte sono illustrate nella Fig. 4.6. Se il muscolo si contrae fortemente le bande I e H si assottigliano sino ad estinguersi, mentre la banda A resta inalterata. La parte inferiore della Fig. 4.6 mostra la struttura delle *miofibrille*. Ciascuna di esse è composta da *miofilamenti*,

divisi trasversalmente dalle bande Z, formando sezioni ripetute identicamente, chiamate *sarcomeri*. I sarcomeri hanno lunghezze variabili intorno ad un valore medio di 2,5 μ m, secondo lo stato di contrazione del muscolo. All'interno del sarcomero si distinguono due tipi di filamenti molecolari, uno più sottile, l' *actina*, con un diametro di circa 5 nm e l'altro più spesso *miosina*, con un diametro di circa 12 nm. I filamenti di *actina* sono collegati a un'estremità alle bande Z, sono liberi all'altra, sovrapponendosi parzialmente a quelli di *actina*. La disposizione dei filamenti è mostrata nella parte inferiore della Fig. 4.6.

La banda A corrisponde ai filamenti di miosina, la banda I corrisponde ai filamenti di actina che non sono sovrapposti con quelli di miosina. La banda H corrisponde alla zona media della banda A, quella in cui i filamenti di actina non sono penetrati.

Un'altra linea, la banda M, giace trasversalmente a metà della banda H. Un'indagine accurata mostra che essa consiste in fasci di finissimi fili che collegano filamenti adiacenti di miosina.

4.2 Il meccanismo contrattile

Il meccanismo di contrazione dei sarcomeri non è ancora completamente chiarito.

Il modello più accreditato della contrazione muscolare è quello della *cross-bridge theory*, la quale ipotizza la formazione di ponti trasversali ATP-dipendenti tra le teste della miosina e corrispondenti siti dell'actina, con il conseguente scorrimento relativo dei due filamenti.

I muscoli scheletrici sono attivati da motoneuroni afferenti al sistema nervoso volontario. Artificialmente un muscolo può essere stimolato con impulsi elettrici o chimici e la singola stimolazione produce un evento contrattivo, *twitch*, della durata di circa 150 ms. La stimolazione elettrica fa scattare il rilascio di ioni calcio dalle sacche del reticolo sarcoplasmatico, che migrano all'interno della cellula e attivano i legami incrociati tra le teste della miosina e i siti specifici dell'actina. Sperimentalmente si osserva che l'ampiezza e il tipo di forza contrattile sviluppata dipendono dalla frequenza della stimolazione. Una serie di stimolazioni ripetute, con frequenza

inferiore a 6 Hz, produce contrazioni separate e distinguibili, con uguale forza massima. Al crescere della frequenza nascono effetti additivi e i twitch tendono a fondersi.

Il valore della forza generata a regime tende ad un limite, legato alla frequenza di stimolazione. Per frequenze superiori a 60 Hz si ha saturazione (regime tetanico). Al

 Image 261

106

4 I muscoli scheletrici

100/sec

60/sec

40/sec

25/sec

15/sec

Force of connection

10/sec

Fig. 4.7. Effetto della frequenza

di stimolazione sulla forza generata

0 100 200 300 400

[28]

Time (msec)

disopra di 100 Hz, un ulteriore aumento della frequenza ha un effetto trascurabile sul valore della forza generata. È interessante notare come la

frequenza di stimolazione corrispondente al regime tetanico, sia molto vicina alla frequenza elettrica di rete negli usi domestici. I dati presentati nella Fig. 4.7, provenienti dagli esperimenti di A.V. Hill, sono stati ottenuti in condizioni isometriche, cioè con il muscolo vincolato a lunghezza costante.

4.3 Proprietà statiche e dinamiche

I parametri rilevanti per la descrizione del comportamento meccanico sono forza, lunghezza e spostamento. Nella realtà fisica sono presenti innumerevoli situazioni con diversi valori di forza esterna, condizioni di vincolo, esigenze cinematiche. Nei suoi esperimenti Hill definì alcune trasformazioni tipiche:

-

Isometrica (Fig. 4.8a). Si ottiene fissando le estremità del complesso muscolo tendineo.

-

Isotonica (Fig. 4.8b). Uno dei capi del muscolo-tendine è fisso, all'altro è applicata una forza costante, ad esempio un peso.

-

Contrazione libera (Fig. 4.8c). Uno degli estremi è fisso, l'altro è libero e privo di carichi.

Rilascio rapido, quick release. Si tratta di una trasformazione ottenuta combinando le prime due. Il muscolo è prima portato all'eccitazione tetanica in condizioni isometriche con un'opportuna stimolazione, quindi è rilasciato uno degli estremi, al quale è applicato un carico costante.

Agli effetti meccanici il muscolo è un attuatore capace di generare forza ai suoi estremi, contraendosi in opposizione a una forza esterna. In un approccio modellistico si può pensare che il muscolo sia costituito dalla parte contrattile vera e propria, il



4.3 Proprietà statiche e dinamiche

107

Fig. 4.8. Il muscolo come composizione

della parte contrattile e di quella tendinea:

a) contrazione isometrica; b) isotonica; c)

contrazione libera

fascio muscolare, costituito da un grande numero di sarcomeri in serie e in parallelo e la parte tendinea, posta in serie alla prima, che può essere considerata una molla non lineare. I tessuti tendinei e i legamenti manifestano, infatti, sottoposti a prove di trazione, un marcato comportamento non lineare. Nel caso in cui una delle estremità sia libera, il muscolo non può generare alcuna forza, ma si porta all'accorciamento limite, con la massima velocità. Se invece il muscolo parte da una condizione di riposo ed è quindi eccitato, mentre ai suoi estremi è applicata una resistenza, esso si contrae mentre la parte tendinea si estende.

L'andamento complessivo della lunghezza del complesso muscolo-tendineo dipende dal carico applicato e dalla legge di eccitazione. Negli esperimenti di Hill, i risultati di una serie di contrazioni isometriche mostrarono che la forza tetanica sviluppata dipendeva dalla lunghezza con una legge approssimativamente parabolica. La Fig. 4.9 rappresenta quest'andamento riferito a un singolo sarcomero. La lunghezza sulle ascisse è riportata sia in termini assoluti che relativi, mentre in ordinate abbiamo il rapporto tra la forza generata e quella massima, in percentuale. Si può osservare che la lunghezza massima del muscolo giunge a circa 1,8 volte il valore a riposo, quella minima a 0.6.

Alla luce della teoria dei filamenti scorrevoli si riesce a dare una giustificazione qualitativa della forma della curva in Fig. 4.9. Se assumiamo che la forza generata durante la contrazione sia proporzionale al numero delle teste dei filamenti di actina e miosina che possono interagire, è evidente che, in mancanza di sovrapposizione, la forza generata è nulla

(situazione D in Fig. 4.9). Quando nasce una sovrapposizione dei filamenti per scorrimento relativo, la forza generata aumenta. Questo incremento ha termine quando la sovrapposizione è completa (situazioni B e C), per giungere a un massimo di forza, nella regione comunemente chiamata *plateau region*. Se il muscolo continua a contrarsi, la forza riprende a diminuire, per annullarsi completamente (situazione A) quando i due filamenti contigui di actina cominciano a sovrapporsi. Il diagramma presentato si riferisce a condizioni di eccitazione tetanica, riporta quindi per ogni valore della lunghezza del sarcomero la forza massima che il muscolo può produrre. Se consideriamo la regione del diagramma di Fig. 4.10 a destra del massimo, vediamo che per far allungare il muscolo oltre la zona C è necessario vincere non

 Image 263

108

4 I muscoli scheletrici

Fig. 4.9. Relazione statica forza-lunghezza per il sarcomero (riprodotto su autorizzazione di

[39])

Tensione

Totale

Passiva

Generata

Fig. 4.10. Caratteristica sperimentale di un muscolo in contrazione isometrica per varie

L

lunghezze iniziali

Lunghezza

solo la *forza attiva* che il muscolo genera, ma anche la forza passiva dovuta alla rigidità del muscolo stesso. La caratteristica passiva può essere determinata sperimentalmente mediante una prova di trazione su un muscolo non stimolato elettricamente.

4.4 La relazione forza-velocità di contrazione

Nei suoi esperimenti di *quick release*, compiuti facendo seguire a un'eccitazione tetanica in condizioni isometriche una contrazione isotonica, Hill misurò la velocità dell'estremo muscolare libero per vari valori della forza esterna applicata. I risultati sono mostrati nella Fig. 4.11. L'andamento della curva che interpola i dati sperimentali è di tipo iperbolico, in altre parole la velocità di accorciamento è inversamente proporzionale al carico applicato:

$$S * v = \text{costante}$$

(4.4.1)

 Image 264

4.5 L'equazione di Hill per il muscolo tetanico

109

Fig. 4.11. Andamento sperimentale forza-velocità (riprodotto su autorizzazione di [51]) Poiché il prodotto della forza per la velocità rappresenta la potenza, la relazione precedente dice che la potenza prodotta dal muscolo è costante. Una grande velocità di accorciamento si può ottenere soltanto con piccole forze, mentre forze elevate sono accompagnate da piccole velocità. Questo è in contrasto con il comportamento passivo di un materiale viscoelastico, per il quale alte velocità di deformazione sono accompagnate da sforzi elevati e viceversa. Sono degni di nota i punti in cui la curva incontra i due assi. L'intersezione con l'asse delle ascisse rappresenta la velocità massima di contrazione del

muscolo libero. L'intersezione con l'asse delle ordinate il massimo valore di forza che il muscolo può generare in condizioni isometriche. Lo sviluppo di potenza meccanica è legato, come in tutte le "macchine" al concetto di rendimento, inteso come rapporto tra il lavoro esterno ottenuto e l'energia immessa nel sistema a livello metabolico. Le accurate valutazioni sperimentali di Hill e la misure dell'energia meccanica e termica coinvolta nella contrazione muscolare, hanno permesso di giungere all'espressione di una legge analitica forza-velocità di contrazione.

4.5 L'equazione di Hill per il muscolo tetanico

I risultati esposti nel paragrafo precedente possono essere descritti con la seguente equazione, ricavata da A.V. Hill nel 1938:

$$(S + a) * (v + b) = (S_0 + a) * b ,$$

(4.5.1)

S:

tensione sviluppata dal muscolo;

v:

velocità di contrazione;

 Image 265

 Image 266

 Image 267

 Image 268

 Image 269

 Image 270

 Image 271

 Image 272

 Image 273

 Image 274

 Image 275

 Image 276

110

4 I muscoli scheletrici

S₀:

tensione isometrica massima;

a , b: costanti con dimensioni rispettivamente di forza e velocità.

Se nell'equazione precedente si pone $v = 0$ si ottiene:

$$(S + a) * b = (S_0 + a) * b$$

$$S = S_0 .$$

(4.5.2)

Se si pone $S = 0$ si ha invece:

$$a * (v + b) = (S_0 + a) * b$$

$$v = S_0 * b = v_0 .$$

(4.5.3)

a

Poiché S₀ e v₀ sono determinabili sperimentalmente come la massima tensione isometrica a velocità nulla e la massima velocità di contrazione a

forza nulla, possiamo ottenere il rapporto a/b dalla (4.5.3). Vedremo in seguito come giungere al valore delle due costanti.

Forma adimensionale

L'equazione di Hill può essere posta in termini adimensionali, ricavando v :
 $S_0 - S$

$$v = b$$

.

(4.5.4)

$$S + a$$

Ricordando l'equazione:

$$S_0$$

$$v_0 = b a$$

si possono ottenere i seguenti rapporti adimensionali

$$v$$

$$1 - S$$

$$1 - v$$

$$=$$

$$S$$

$$S$$

$$0$$

$$v$$

;

=

0 .

(4.5.5)

v_0

$1 + c S$

S_0

$1 + c v$

S

v

0

0

Dove:

$c = S_0 .$

(4.5.6)

a

Grazie a questa forma le costanti da determinare diventano P_0 , v_0 e c .

L'equazione di Hill nella forma (4.5.1) contiene tre costanti indipendenti, a , b , S_0 .

Nella forma adimensionale (4.5.5) le costanti sono S_0 , v_0 , c . Queste costanti dipendono da numerosi fattori, come la lunghezza iniziale del muscolo e altri parametri chimico-fisici. La massima tensione isometrica S_0

è legata a L_0 da una legge approssimativamente parabolica, si veda la Fig. 4.9. Per valori di L_0 pari a metà della lunghezza del sarcomero a riposo la tensione si annulla. Questo accade anche quando L_0 supera 1,5 volte la lunghezza a riposo. La massima velocità di accorciamento v_0

si può, con ragionevole approssimazione, ritenere indipendente da L_0 . La costante c risulta anch'essa non dipendente da L_0 . Quindi si può ritenere in via approssimata che a sia proporzionale ad S_0 , secondo la (4.5.6), mentre b è uguale a v_0 / c . I valori di c per il muscolo scheletrico variano nel campo 1, 2 ÷ 1, 4. Ricavato quindi S_0 sulla base di L_0 e v_0 da dati sperimentali o valutazioni su dati esistenti in letteratura, sarà possibile ottenere le costanti che appaiono nelle due forme dell'equazione di Hill.

4.5 L'equazione di Hill per il muscolo tetanico 111

Giustificazione energetica dell'equazione di Hill

È interessante esaminare la derivazione dell'equazione di Hill. Egli parti dal bilancio energetico (in termini di quantità di calore nell'unità di tempo) nella contrazione muscolare:

$$E = A + H + W .$$

(4.5.7)

In cui i diversi termini indicano:

E: l'energia prodotta nell'unità di tempo;

A: la somma dei calori che non sono legati a spostamento (quindi tutti esclusi gli ultimi due);

W: la potenza meccanica prodotta, uguale a $S * v$;

H: il calore supplementare di accorciamento (o allungamento).

In condizioni isometriche si ha ovviamente $E = A$. Quando il muscolo si contrae, si produce un'ulteriore reazione chimica, a cui corrisponde un

addizionale produzione d'energia, uguale alla somma del calore di accorciamento e del lavoro svolto, $H + W$.

Con la misura di E in contrazione e di A in condizioni isometriche, Hill ottenne il termine $H + W$, mostrando che:

$$H + W = b * (S_0 - S)$$

(4.5.8)

dove S_0 è la massima tensione sviluppata (in condizioni isometriche). Un ulteriore passo fu quello di assumere il calore di accorciamento proporzionale alla velocità secondo la legge:

$$H = a * v .$$

(4.5.9)

Combinando i risultati precedenti si ha:

$$H + W = b * (S_0 - S) = a * v + S * v = (S + a) * v .$$

(4.5.10)

Considerando l'ultima eguaglianza, se si somma ab al primo e secondo termine, con semplici passaggi si ottiene l'equazione di Hill (4.5.1).

4.5.1 Il modello di Hill a tre elementi

Osservazioni sulla struttura muscolare portano ad assumere che il sistema muscolo tendineo sia costituito da una parte contrattile in serie con tendini e tessuti connettivi. In un approccio modellistico, si può pensare quindi a un attuatore collegato in serie con un elemento elastico non lineare, che riproduca, nel miglior modo possibile la risposta elastica istantanea della parte tendinea. Se si vuol tener conto anche del fatto che le fasce muscolari sono avvolte da tessuti connettivi di contenimento, con comportamento viscoelastico, si può pensare di aggiungere un elemento elastico o viscoelastico in parallelo per modellare questi effetti. Queste considerazioni portarono al modello rappresentato nella Fig. 4.12. Nel modello di Hill

l'elemento contrattile era un generatore di forza istantanea, nel linguaggio dell'analisi dei sistemi, uno *step*.

Sperimentalmente si è osservato che, per quanto rapida, la generazione di forza è legata a una costante temporale non nulla, per cui alla parte contrattile è stato aggiunto un elemento viscoso in parallelo.

 Image 277

 Image 278

 Image 279

 Image 280

 Image 281

112

4 I muscoli scheletrici

Per ricavare le equazioni del modello di Hill a tre elementi, si parta dall'ipotesi che se l'elemento contrattile non è attivato, la legge sforzo-deformazione del muscolo a riposo rappresenta la legge costitutiva dell'elemento elastico in parallelo. In un muscolo attivato invece, la differenza tra le caratteristiche del muscolo completo e dell'elemento in parallelo rappresenta la legge costitutiva del complesso elemento contrattile-elemento in serie. Facciamo l'ipotesi che l'elemento in serie sia semplicemente elastico. Riferiamo la nostra analisi al semplice sarcomero, nel quale il filamento di miosina si sovrappone parzialmente a quelli di actina, vedi Fig. 4.13 nella quale: $L = L_0 + 3L$: lunghezza totale del sarcomero, con L_0 la lunghezza a riposo; H :

larghezza della banda H , vedi il paragrafo sulla struttura del muscolo; I :

larghezza della banda I ;

!:

sovrapposizione tra il filamento di miosina e quelli di actina; δ :

lunghezza dell'elemento elastico in serie, nulla se il muscolo è a riposo.

Osservando la figura abbiamo per la sovrapposizione dei filamenti:

$$\delta = M - H = 2C - I .$$

(4.5.11)

E per la lunghezza del sarcomero:

$$L = M + I = M + 2C - \delta + \delta_0 .$$

(4.5.12)

Derivando rispetto al tempo l'ultima equazione si ottiene:

$$dL = - d\delta + d\delta_0 .$$

(4.5.13)

$\frac{dL}{dt}$

$= - \frac{d\delta}{dt} + \frac{d\delta_0}{dt}$

$\frac{dL}{dt} = - \frac{d\delta}{dt} + \frac{d\delta_0}{dt}$

Lo sforzo nell'elemento parallelo PE sarà una funzione nota della deformazione $G =$

$L - L_0$. Poiché nell'espressione precedente L

L

L_0 è una costante potremo scrivere che il

$\frac{dL}{dt}$

contributo di forza dovuto all'elemento in parallelo sarà una funzione della lunghezza del sarcomero più quella dell'elemento in serie, cioè di L .
Avremo quindi: $SP = SP(L)$.

(4.5.14)

Fig. 4.12. Il muscolo come insieme di tre elementi, uno contrattile e due elastici

 Image 282

 Image 283

 Image 284

 Image 285

 Image 286


 Image 287

 Image 288

 Image 289

 Image 290

 Image 291

 Image 292

 Image 293

 Image 294

 Image 295

 Image 296

 Image 297

 Image 298

 Image 299

 Image 300

 Image 301


 Image 302

 Image 303

 Image 304

 Image 305

 Image 306

 Image 307

 Image 308

 Image 309

 Image 310

 Image 311

 Image 312

 Image 313

 Image 314

 Image 315

4.5 L'equazione di Hill per il muscolo tetanico

Fig. 4.13. I parametri del modello di Hill a tre elementi Il contributo di forza dovuto al sarcomero e all'elemento in serie sarà invece funzione della lunghezza di questi due elementi, si avrà quindi:

$$S_s = S_s(l, \dot{l}) .$$

(4.5.15)

La forza complessiva dovuta al muscolo, o meglio alla componente modulare del muscolo che stiamo considerando sarà

$$S = S_P + S_s = S_P(L) + S_s(l, \dot{l}) .$$

(4.5.16)

In cui, per l'ipotesi fatta in precedenza si ammette che sia $S_s = f_2(l, \dot{l}) = 0$ per $\dot{l} = 0$, si considera cioè che se il muscolo è a riposo anche l'elemento elastico in serie che ne condivide la forza non sarà deformato e la forza sarà nulla. Se le forze sono variabili nel tempo avremo in termini differenziali:

!

!

!

!

dS

!

!

$$= dS_P dL + !dS_s ! d\dot{l} + !dS$$

d!

! s !!

.

(4.5.17)

dt

dL dt

! d6 !! dt

d! 6 dt

Tenendo conto della (4.5.13) si ha:

!

!

!

!

dS

!∂ !

!∂ !

= dSP dL + ! Ss !

dL + d! +! Ss! d! =

dt

dL dt

! ∂6 !

!

!

!

dt

dt

$\partial! 6 dt$

!! !

!

!

!

!

$\partial!$

$!\partial!$

$!\partial!$

$= dSP + ! Ss ! dL + ! Ss ! + ! Ss !$

$d! .$

(4.5.18)

dL

$!\partial 6 !$

!

!

!

!

!

dt

∂!

∂! 6 dt

Nei due casi di contrazione isometrica e isotonica si ha:

Contrazione isometrica: $L = \text{cost}$ e $dL = 0$

dt

!

!

!

!

dS

!∂!

!∂!

= ! Ss ! + ! Ss ! d! .

(4.5.19)

dt

! ∂! !!

!

!

$\partial! \delta dt$

Contrazione isotonica: $S = \text{cost}$ e $dS = 0$

dt

!

!

!

!

!

!

dS

!

!

!

!

!

!

P

∂

∂

∂

+ ! Ss !

$dL + ! Ss! +! Ss! d! = 0 .$

(4.5.20)

dL

! ∂ 6 !

!

!

!

!

!

dt

$\partial! !$

$\partial! 6 dt$

114

4 I muscoli scheletrici

Dal 1938, il modello a tre elementi di Hill ha dominato la scena per oltre ses-santa anni, durante i quali si sono avute numerose correzioni e aggiunte: ad esempio gli elementi serie e parallelo sono diventati viscoelastici ed è stata implementata una funzione per rappresentare il livello di attivazione del sarcomero. Nonostante ciò, es-so è andato incontro a molte critiche, che lo hanno gradualmente portato al declino: tra queste le più importanti sono

che, la disposizione degli elementi non è univoca, la divisione delle forze tra i tre elementi impone ipotesi non verificabili e infine, che i sarcomeri non sono tutti uguali. Ciò è causa del fallimento di molti modelli matematici, perché essi, partendo dal sarcomero, sono estesi al comportamento dell'intero muscolo, senza tener conto dei particolari e distinti contributi di altre strutture biologiche, del fatto che gli aggregati di fibre non sono unidirezionali e che il reclutamento può non essere né uniforme, né contemporaneo.

Nel tempo, con l'avvento di altre scoperte, sono stati proposti altri modelli, più sofisticati e attinenti al comportamento reale del muscolo, ma sempre basati sulla teoria dei *cross bridges*. Tra questi meritano di essere menzionati quello di Huxley (1957 e 1974) e Huxley-Simmons (1971). Altri invece hanno messo in discussione la *cross-bridge theory*, proponendo di indirizzare l'attenzione su altri fenomeni legati alla contrazione muscolare, come il ruolo dell'acqua. Sono stati proposti i modelli di Noble e Pollack (1977) e di Pollack (1991). Il dibattito è in ogni caso ancor oggi molto acceso.

L'esperimento di "Quick release"

L'esperimento è composto dalle seguenti operazioni:

-

per mezzo di un sistema di fissaggio si porti la lunghezza del muscolo al valore L_1 . Il muscolo avrà ambedue le estremità collegate agli afferraggi e non potrà variare la sua lunghezza. In questa fase iniziale il muscolo non è stimolato;

-

si ecciti con impulsi elettrici ripetuti il muscolo sin quando la tensione sviluppata non raggiunga il valore S_1 ;

-

si liberi rapidamente una delle estremità del muscolo, cui è applicato un peso tale da portare la tensione al valore S_2 inferiore a S_1 .

L'ipotesi alla base dell'esperimento è che la sovrapposizione σ tra i filamenti di actina e miosina non subisca alcuna variazione nel brevissimo intervallo di tempo che intercorre tra il primo e il secondo stato, cioè si assume $\sigma = \text{cost.}$ In queste condizioni abbiamo:

Nel primo stato isometrico:

$$S_1 = SP(L_1) + S_s(\sigma_1, \sigma_1) .$$

(4.5.21)

Nel secondo isotonicamente:

$$S_2 = SP(L_2) + S_s(\sigma_2, \sigma_1) .$$

(4.5.22)

Sottraendo le due equazioni precedenti si ha:

$$S_1 - S_2 = SP(L_1) - SP(L_2) + S_s(\sigma_1, \sigma_1) - S_s(\sigma_2, \sigma_1) .$$

(4.5.23)

 Image 316

4.5 L'equazione di Hill per il muscolo tetanico

115

Fig. 4.14. Il modello con due elementi

Notiamo ora che se la sovrapposizione actina-miosina resta costante la variazione di lunghezza del muscolo è dovuta soltanto all'elemento elastico in serie, per cui si ha: $L_1 - L_2 = \sigma_1 - \sigma_2$.

(4.5.24)

Le ultime due equazioni ci permettono di ricavare la differenza $S_s(\sigma_1, \sigma_1) -$

$S_s(62, !1)$ in funzione di $61 - 62$ quando vengano misurate le grandezze $L1, L2, S1, S2, SP(L1), SP(L2)$. Per determinare l'andamento di $S_s(61, !1)$ come funzione di 61

quando lo stato iniziale venga fatto variare opportunamente, è necessario determinare la lunghezza $L2$ del muscolo per cui 62 e $S_s(62, !1)$ sono nulli. Questo può essere fatto per tentativi, sino al momento in cui viene trovato un valore S^* di S

2

2 corrispon-

dente a un valore L^* di L

= S

). Per la (4.5.16) questo comporta che

2

2 per cui S^*

2

$P(L^*$

2

$S_s(62, !1) = 0$ e per le ipotesi fatte $6^* = 0$. Per le (4.5.23) (4.5.24) si ha allora: 2

$61 = L1 - L^* 2;$

$S_s(61, !1) = S1 - SP(L1) .$

(4.5.25)

Si può in questo modo determinare l'andamento di $S_s(LC, \dot{L})$ in funzione di LC .

Esempio 4.1. Come esempio di applicazione del modello di Hill si voglia simulare il comportamento isometrico del bicipite umano. Partiamo dal modello a due elementi della Fig. 4.14, semplificato con l'eliminazione dell'elemento elastico in parallelo. Il motivo è che, se supponiamo di partire dalla posizione di riposo, l'effetto dell'elemento elastico in parallelo è trascurabile. Assumiamo i seguenti dati:

-

lunghezza dell'elemento contrattile a riposo $LC_0 = 0,2 \text{ m}$;

-

lunghezza complessiva dei tendini a riposo $L_0 = 0,1 \text{ m}$;

-

forza massima statica isometrica per $LC = LC_0 = 0,2 \text{ m}$; $S_0 = 1100 \text{ N}$;

-

andamento della forza S_0 in funzione di LC parabolico con $S_0 = 0$ per $LC =$

$0,2 - 0,6 = 0,4 \text{ m}$ e $LC = 0,2 + 1,6 = 1,8 \text{ m}$, e $S_0 = 1100 \text{ N}$ per $LC = 0,2$ in base al diagramma della Fig. 4.10;

-

caratteristica forza deformazione dell'elemento elastico in serie data dalla legge: $S = K(e^{6\epsilon} - 1)$ con $K = 109450$;

(4.5.26)

si tratta di una legge esponenziale con rigidità crescente con la deformazione;

•

variazione di lunghezza dell'elemento contrattile $!;$

•

variazione di lunghezza dell'elemento in serie $!6.$

Soluzione. Considerando che la lunghezza L complessiva del sistema muscolo tendineo deve essere costante perché stiamo simulando una contrazione isometrica, si

 Image 317

 Image 318

 Image 319

 Image 320

 Image 321

116

4 I muscoli scheletrici

Fig. 4.15. a) Diagramma Forza-lunghezza elemento in serie; b) diagramma Forza-lunghezza elemento contrattile

avrà.

$$L = LC0 - ! + 60 + !6 = LC0 + 60$$

$$!6 = L - 60 + !.$$

(4.5.27)

La procedura impiega l'ambiente Simulink. Considerando una serie di piccoli intervalli temporali tali da poter considerare lineare l'andamento delle funzioni descritte si parte con $! = 0$ e utilizzando la relazione (4.5.5),

modificata inserendo al posto dell'unità al numeratore una funzione di attivazione variabile tra zero e uno. Nel nostro caso abbiamo supposto di simulare la funzione di attivazione $f(t)$ con una rampa della durata di 100 ms. La relazione (4.5.28) viene utilizzata per calcolare il valore della velocità di contrazione, la quale risulta pari al primo passo a v_0 , velocità di $f(t) - S$

$v =$

S_0

(4.5.28)

v_0

S

$1 + c S_0$

contrazione senza carico, assunta pari a 1 m/s. Integrando il valore di v_0 si ottiene !

che viene quindi usato nel secondo passo e in quelli successivi per calcolare !6. Per mezzo di questo valore si ottiene la forza S di reazione dell'elemento elastico dalla (4.5.26) e il processo continua recursivamente. È opportuno notare che a ogni passo cambia la lunghezza LC dell'elemento contrattile e quindi cambia il valore di S_0 che dovrà essere calcolato impiegando la legge parabolica menzionata in precedenza. Si tratta di una legge della forma generale:

$$S_0 = a_0 + a_1 * LC + a_2 * L^2 .$$

C

(4.5.29)

Nella quale i coefficienti dovranno essere calcolati mediante i valori conosciuti della forza e della lunghezza LC nel punto di ascissa LC_0 e negli altri due punti di ascissa rispettivamente $LC_0 * 0,6$ e $LC_0 * 1,6$. La Fig.

4.15a riporta il grafico della forza nell'elemento in serie in funzione del suo allungamento, la Fig. 4.15b il grafico Forza-lunghezza dell'elemento contrattile. Chiaramente mentre l'elemento in serie aumenta

 Image 322

 Image 323

4.5 L'equazione di Hill per il muscolo tetanico

117

Fig. 4.16. Andamento temporale

della forza muscolare

Fig. 4.17. Simulazione di una contrazione isometrica del muscolo bicipite la sua lunghezza, trattandosi di condizioni isometriche, l'elemento contrattile riduce la sua lunghezza della stessa quantità. A regime tetanico l'allungamento della parte tendinea è pari a circa 0,01 m. È anche interessante osservare il transitorio nel raggiungimento delle condizioni tetaniche, riportato nel grafico di Fig. 4.16. La forza generata dal muscolo ha una rapida salita per raggiungere il regime tetanico dopo circa 0,2 s. Ricordiamo che il transitorio di attivazione era costituito da una rampa di durata pari a 100 ms. La Fig. 4.17 mostra il diagramma a blocchi in ambiente Simulink della simulazione effettuata.

 Image 324

 Image 325

118

4 I muscoli scheletrici

Esercizi

1. Si eseguano alcuni schizzi per rappresentare i movimenti delle articolazioni dell'arto superiore, con la nomenclatura medica.

2. Se individuino i valori approssimativi delle escursioni max e min per i movimenti della spalla del gomito e del polso.
3. Considerando i valori estremi precedenti si tracci il volume di lavoro dell'arto superiore con riferimento al polso (volume descritto dal polso) per tutti i possibili movimenti permessi dall'articolazione.
4. Si descrivano tutte le articolazioni dell'arto superiore descrivendo la categoria a cui ciascuna articolazione appartiene.
5. Si calcoli la matrice di trasformazione spalla-polso per un angolo di flessione della spalla di 30° di abduzione di 45° , rotazione 15° e flessione del gomito di 60° .
6. Si inverta la matrice calcolata in precedenza.
7. Sopra uno schizzo del corpo umano con le articolazioni dell'arto superiore e inferiore si pongano i sistemi di riferimento usando la convenzione di Denavit-Hartenberg.
8. Si eseguano considerazioni geometriche per stabilire l'escursione verticale del baricentro del corpo umano durante il cammino.
9. Si scriva una procedura Matlab per calcolare e rappresentare graficamente il movimento di un sistema articolato piano con due segmenti.
10. Si simuli nell'ambiente Simulink un esperimento di Quick-release nel quale un muscolo viene portato allo stato tetanico e quindi rilasciato con una forza di contrasto inferiore a quella tetanica generata dal muscolo.

 Image 326

 Image 327

 Image 328

5

Elementi di cinematica

La *cinematica* è quel ramo della fisica che si occupa di descrivere quantitativamente il moto dei corpi, indipendentemente dalle forze che l'hanno generato. In ciò differisce dalla dinamica che studia l'effetto delle forze sul movimento. In generale lo stato di moto istantaneo di un corpo è riconducibile a un moto roto-traslatorio, composto da una traslazione secondo un certo asse e da una rotazione intorno a questo. Esistono però dei casi in cui sono poco importanti o trascurabili gli effetti della rotazione rispetto a quelli della traslazione. In questi casi si ottiene una notevole semplificazione, senza perdere molto dell'analisi, ricorrendo al concetto di punto materiale, una massa puntiforme eguale a quella del corpo in esame, posta nel suo baricentro. Considerare un corpo come punto materiale comporta una semplificazione nella descrizione della sua posizione nello spazio. Infatti, sono sufficienti, tre coordinate invece delle sei canoniche per un corpo esteso. L'origine dei tempi non influenza le leggi della cinematica, come la posizione e l'orientamento del sistema di riferimento impiegato.

Lo spazio in cui i problemi cinematici sono studiati è omogeneo e isotropo. Questo comporta che le leggi cinematiche siano invarianti rispetto alle traslazioni, spaziali e temporali e anche rispetto alle rotazioni.

5.1 Cinematica del punto materiale

La posizione di un punto materiale nello spazio è completamente definita da un vettore \mathbf{r} , o dalla matrice colonna che rappresenta le sue componenti, coordinate Cartesiane del punto \mathbf{P} :

$$\mathbf{OP} = \mathbf{r} = r\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} .$$

(5.1.1)

Le espressioni della velocità e dell'accelerazione del punto si ottengono derivando il vettore che rappresenta la sua posizione, ricordando che, essendo il sistema di riferimento assunto da considerare fisso, le derivate dei versori \mathbf{j} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , sono nulle $\mathbf{v}_P = d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) dt$

$$\mathbf{a}_P = d^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) .$$

(5.1.2)

dt2

Picasso B.: Fondamenti di Meccanica e Biomeccanica. Meccanica dei corpi rigidi articolati.

DOI 10.1007/978-88-470-2333-8_5, © Springer-Verlag Italia 2013

 Image 329

 Image 330

 Image 331

120

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.1. Posizione di un punto ma-

teriale

5.2 Moto rettilineo

La trattazione può essere scalare, perché la posizione del punto su una traiettoria rettilinea è definita da un solo parametro scalare, ad esempio l'ascissa x , con l'asse X diretto come la traiettoria del moto. Per la velocità e accelerazione di P abbiamo allora le semplici espressioni:

$$OP = xP$$

$$vP = \dot{x}P$$

$$aP = \ddot{x}P .$$

(5.2.1)

Esempi di moto rettilineo sono:

-

moto rettilineo uniforme, nel quale l'accelerazione è nulla e la velocità costante;

•

moto rettilineo uniformemente accelerato, nel quale la velocità varia linearmente col tempo, mentre l'accelerazione è costante. Per questo tipo di moto si ha, con successive integrazioni:

t

"

$$a_P = a = \text{cost}$$

$$v_P =$$

$$a \cdot dt = a \cdot t + v_0$$

0

t

"

$$x_P =$$

$$v_P \cdot dt = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 .$$

(5.2.2)

2

0

Nelle espressioni precedenti x_0 e v_0 rappresentano rispettivamente lo spazio percorso per $t = 0$ e la velocità iniziale del punto materiale.

Fig. 5.2. Moto rettilineo di un punto

 Image 332

 Image 333

 Image 334

 Image 335

5.2 Moto rettilineo

121

Fig. 5.3. Andamento dell'accelerazione e della velocità in funzione del tempo in un moto uniformemente accelerato

Esempio 5.1. Uno scattista raggiunge la sua massima velocità v_{max} in 2,5 s dalla partenza, con accelerazione costante. In seguito mantiene la velocità costante e termina i 100 m in un tempo totale di 10,4 s. Determinare la velocità massima v_{max} .

Le relazioni necessarie per risolvere il problema sono quelle esposte in precedenza.

Si ha:

$$v_{max} = a * 2,5$$

$$s = \frac{1}{2} a * 2,5^2 + v_{max}(10,4 - 2,5) = 100 .$$

(5.2.3)

2

Le due equazioni scritte, che esprimono la velocità massima raggiunta dallo scattista e lo spazio percorso, contengono le due incognite v_{max} e a . Queste portano al risultato $v_{max} = 10,93$ m/s. Se nelle relazioni (5.2.2) vogliamo che compaiano soltanto la velocità, il tempo e lo spazio, possiamo sostituire nella terza equazione la seconda ottenendo:

$$x_p = x_0 + (v_p + v_0) \cdot t$$

(5.2.4)

2

Analogamente si può ottenere un'espressione che legghi accelerazione, velocità e spazio, eliminando il tempo dalle due ultime equazioni (5.2.2). Si ottiene così: $v^2 =$

+

p

$$v^2 = 2a_0(x_p - x_0)$$

(5.2.5)

 Image 336

 Image 337

 Image 338

124

5 Elementi di cinematica

Si ricavino le espressioni algebriche per la velocità, l'accelerazione e lo spostamento della vettura nelle tre fasi del moto.

Soluzione. Prima fase. Essendo la velocità della vettura funzione lineare del tempo l'accelerazione è costante. Convertendo il valore delle velocità in m/s si ha $a = 25 / 30 = 0,83 \text{ m/s}^2$. L'espressione della velocità è quindi l'equazione di una retta, due punti della quale sono:

$$t = 0 \text{ s}$$

$$v = 0 \text{ m/s}$$

$$t = 30 \text{ s}$$

$$v = 25 \text{ m/s .}$$

Poiché l'equazione di una retta in forma algebrica si può scrivere come $v = c_1 t + c_2$

con c_1 e c_2 coefficienti incogniti, sostituendo i valori v , t dei due punti per cui la retta deve passare si ottiene il sistema:

$$0 = c_1 \cdot 0 + c_2$$

$$25 = c_1 \cdot 30 + c_2$$

da cui si ricava $c_1 = 25 / 30 = 0,83 = a$, $c_2 = 0$, $v = 0,83t$.

Quindi l'accelerazione nel primo tratto è pari a $0,83 \text{ m/s}^2$; l'espressione dello spostamento è quadratica. Si ottiene, ricordando che nel moto uniformemente accelerato è:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

con

$$x_0 = v_0 = 0$$

2

si ha allora: $x = 0,5 \cdot 0,83 t^2 = 0,42 t^2$.

Seconda fase. L'accelerazione è nulla nel tratto centrale del diagramma, la velocità ha un andamento costante in funzione del tempo, lo spostamento, lineare.

Terza fase. Ancora una volta la velocità varia linearmente da 25 a 0 m/s in 60 s.

Potremo ancora utilizzare l'espressione $v = c_1 t + c_2$, tenendo presente che la retta passa per i due punti

$$t = 120 \text{ s}$$

$$v = 25 \text{ m/s}$$

$$t = 180 \text{ s}$$

$$v = 0 \text{ m/s .}$$

Imponendo il passaggio della retta per i due punti si ottiene:

$$25 = c_1 * 120 + c_2$$

$$0 = c_1 * 180 + c_2 .$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ha:

$$25 = - c_1 * 60;$$

$$c_1 = a = - 0 , 42 \text{ m/s}^2$$

$$c_2 = 0 , 42 * 180 = 75 , 6 \text{ m/s}$$

la legge di variazione di velocità è $v = 75 , 6 - 0 , 42t$; la legge di variazione dello spostamento nella terza fase si ottiene integrando l'espressione della velocità:

" t

x =

$$(75 , 6 - 0 , 42t)dt = 75 , 6(t - 120) - 0 , 21t^2 + 0 , 21 * 120^2$$

t=120

$$= - 6048 + 75 , 6t - 0 , 21t^2 .$$

 Image 339

 Image 340

 Image 341

5.2 Moto rettilineo

125

Fig. 5.8. Andamento dell'accelerazione e della velocità col tempo Per $t = 180$ la distanza percorsa nella fase tre è 756 m. La distanza totale sarà: $x_t = 0,42 * 302 + 25 * 90 + 756 = 3384$ m .

È interessante osservare il grafico di accelerazione e spostamento del veicolo durante tutte le fasi del moto. Il grafico di accelerazione mostra che questa quantità è diversa da zero, costante e positiva nella prima fase, ancora costante, a negativa nella terza fase, nulla nella seconda. Il grafico di spostamento presenta una prima fase parabolica che si raccorda a un secondo tratto lineare, per terminare con un terzo tratto ancora parabolico.

Un caso importante di moto uniformemente accelerato si ha nella caduta dei gravi.

Se trascuriamo la resistenza dell'aria, l'accelerazione di un corpo che cade liberamente è pari a quella di gravità. Il calcolo della velocità e dello spostamento del corpo in ogni istante può quindi essere svolto con la (5.2.2). Sono tuttavia frequenti casi di moti in cui le forze applicate al corpo dipendono dalla sua velocità, come nel caso della resistenza opposta dall'aria all'avanzamento di un veicolo. Il caso della caduta per gravità di un corpo immerso in aria, trattato nel capitolo sulla dinamica, rappresenta un tipico moto nel quale l'accelerazione dipende dal quadrato della velocità di traslazione.

Esempio 5.4. Lo sciatore nella Fig. 5.9 possiede un'accelerazione costante pari a 2 m/s^2 e una velocità iniziale di 10 m/s nel punto 0. Si calcoli la velocità nel punto 1

distante 100 m dal punto 0 e il tempo impiegato per compiere il tratto 0-1.

Soluzione. Si tratta ancora una volta di un moto uniformemente accelerato, nel quale la legge del moto è del tipo:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

con

x

2

$$0 = 0$$

$$v_0 = 10 \text{ m/s}$$

$$a = 2 \text{ m/s}^2$$

si ha allora

$$x = 10t + t^2 = 100$$

$$t^2 + 10t - 100 = 0 .$$

L'ultima relazione è un'equazione di secondo grado che fornisce per t una radice negativa, priva di senso nel nostro caso, e una radice positiva, pari a 6,18 s. Sostituendo questo valore nell'espressione della velocità si ottiene $v_1 = 22,36 \text{ m/s}$.

 Image 342

 Image 343

 Image 344

 Image 345

126

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.9. Moto di uno sciatore sul pendio

5.3 Moto circolare

Il moto circolare di un punto materiale può essere studiato rispetto a un riferimento fisso XYZ con versori \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} (se supponiamo che la traiettoria sia contenuta nel piano XY la coordinata z è superflua), o a uno mobile ξ, η, μ, γ con versori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ che accompagna il punto materiale durante il suo movimento. \mathbf{e}_1 è orientato secondo il raggio della traiettoria, dal centro verso la periferia, \mathbf{e}_2 tangente alla traiettoria e orientato in modo da percorrere la circonferenza con senso di rotazione antiorario, \mathbf{e}_3 perpendicolare al piano del moto e orientato in modo da formare una terna destra con i primi due, cioè uscente verso l'osservatore. Velocità e accelerazione del punto P potranno esprimersi ancora una volta usando le coordinate globali o locali. Nel primo caso si ha: $\mathbf{r}_P = r \cos H \mathbf{i} + r \sin H \mathbf{j}$

$$\mathbf{v}_P = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} = -r \sin H \frac{dH}{dt} \mathbf{i} + r \cos H \frac{dH}{dt} \mathbf{j} = -r \sin H \dot{H} \mathbf{i} + r \cos H \dot{H} \mathbf{j}$$

dt

$$\mathbf{a}_P = (-\ddot{H} r \sin H - \dot{H}^2 r \cos H) \mathbf{i} + (\ddot{H} r \cos H - \dot{H}^2 r \sin H) \mathbf{j}$$

essendo

$$\dot{H} = \omega$$

(5.3.1)

dt

Y

η

μ

y

P

ξ

\mathbf{j}

λ

\mathbf{r}

\mathbf{v}

θ

\mathbf{k}

\mathbf{i}

x

X

ω

Fig. 5.10. Moto circolare

 Image 346

 Image 347

 Image 348

 Image 349

 Image 350

5.3 Moto circolare

127

Rispetto al sistema locale si ha invece:

$d:$

$$\mathbf{v}_P = d\mathbf{r} = d(r\mathbf{i}) = \dot{r}\mathbf{i} + r\dot{\mathbf{i}}$$

$$= r\dot{\theta} \times \hat{e}_\theta = Fr; \dot{\theta}$$

dt

dt

dt

$$\mathbf{a}_P = \dot{v}_P \hat{e}_t + v_P \dot{\theta} \hat{e}_n = \dot{v}_P \hat{e}_t - v_P^2/r \hat{e}_n$$

(5.3.2)

L'accelerazione di P è la somma di due parti, la prima tangenziale, la seconda centripeta. Quest'ultima è presente anche quando la velocità angolare del punto è costante.

Ricordando che:

$$\dot{x} = r \sin \theta \dot{\theta} = - r \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{y} = r \cos \theta \dot{\theta} = - r \dot{\theta} \sin \theta$$

dt

dt

si ha

$$\dot{x}$$

$$= - r \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{y} = - r \dot{\theta} \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

$$\mathbf{v}_P = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} =$$

=

a

.

\dot{y}

$F r \cos H$

$P = "$

$x\dot{i} + \ddot{y}j =$

.

$F r \cos H + F_2 r \sin H$

Si possono anche ottenere i valori precedenti delle componenti di velocità e accelerazione rispetto ad assi fissi, partendo da quelle rispetto ad assi mobili e utilizzando la matrice di rotazione che lega i due sistemi:

[

]

$cH - sH \ 0$

X, Y, Z

[

]

$K, 6, 5 \mathbf{R} =$

sH

cH

0

0

0

1

[

]]]]

]

cH - sH 0

{ 0 } - FrsinH }

XYZv

[

]

P =

sH

cH

0

F

F

[r] = [r cosH]

0

1

0

0

[

] [

] [

]

cH - sH 0

{ - F2r } { - 'Fr sinH - F2 r cosH }

XYZa

[

]

P =

sH

cH

$$, 0 ['Fr] = ['FrcosH + F2rsinH] . (5.3.3)$$

0

0

1

0

0

Esempio 5.5 (Voli suborbitali). Nell'addestramento ai voli spaziali si svolgono prove che tendono ad abituare l'astronauta alla vita nello spazio, in

assenza di gravità.

Per simulare questa condizione si ricorre a piscine, dove gli astronauti s'immergono svolgendo una serie di operazioni, per verificare e migliorare la capacità di lavoro in assenza di peso. Un'alternativa è quella dei voli suborbitali, nei quali un aeroplano, opportunamente equipaggiato, vola secondo traiettorie tali che l'accelerazione indotta dalla traiettoria di volo dia luogo a un campo di forze centrifughe che compensano, con una certa approssimazione, quelle gravitazionali. Ammettendo che la traiettoria sia un arco di circonferenza, cerchiamo di valutare il raggio necessario per ottenere un'accelerazione eguale a quella di gravità.

Con riferimento alla Fig. 5.11, se il velivolo percorre una traiettoria circolare di raggio R , l'aereo e i suoi occupanti saranno soggetti a un'accelerazione centripeta pari a $-v^2/R$, diretta come \mathbf{l} e con verso contrario. La forza d'inerzia corrispondente sarà

 Image 351

 Image 352

 Image 353

 Image 354

 Image 355

128

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.11. Voli suborbitali

quindi $m v^2/R$, diretta nel senso positivo di \mathbf{l} . Supponendo che l'aereo percorra la sua traiettoria con una velocità costante di 800 km/h, corrispondente a 222 m/s, il raggio della traiettoria necessario per ottenere un'accelerazione pari a g risulta: $R = g = v^2 = 2222 =$

F

5023 m .

2

g

9 , 81

Raggi inferiori daranno luogo ad accelerazioni superiori a quella di gravità, che proietteranno i passeggeri del velivolo verso il soffitto. La condizione di assenza di peso si può avere solo per periodi piuttosto brevi, circa 20 s. Impiegando lo stesso artificio si possono realizzare *campi di gravità artificiale*, ad esempio nelle stazioni spaziali orbitanti abitate dall'uomo. L'assenza assoluta di gravità protratta nel tempo **Fig. 5.12**. La stazione spaziale europea (NASA)

 Image 356

 Image 357

 Image 358

 Image 359

 Image 360

 Image 361

5.4 Moti balistici piani

129

induce nell'organismo vere e proprie patologie. È anche causa di problemi tecnici perché obbliga a vincolare tutti gli oggetti e i sistemi presenti nella stazione orbitante. La gravità artificiale può essere indotta con una rotazione relativamente lenta della stazione intorno al proprio asse, rotazione che, per la mancanza di resistenze di qualunque tipo, non richiede un dispendio energetico se non nella fase iniziale, di accelerazione. La Fig. 5 12, mostra la stazione spaziale internazionale ISS sviluppata congiuntamente

dalla NASA insieme alle Agenzie Spaziali Europea ESA, Russa, Giapponese e Canadese. Al momento in cui scriviamo, la stazione ospita un equipaggio di tre persone. La Fig. 5.12 si riferisce alla situazione dopo l'ultima missione per l'aggiunta del modulo Columbus, nel 2008. Per realizzare un campo di gravità artificiale di 0,1 g a 30 m dall'asse di rotazione è necessaria una velocità angolare di:

#

F =

$0,1 * 9,81 = 0,18 \text{ rad/s}$.

30

Cioè una rotazione completa ogni 34 ore.

Esempio 5.6. Un'auto percorre a velocità v costante una strada che forma un dosso con raggio di curvatura pari a 10 m. Calcolare il valore della velocità per cui la vettura perde completamente aderenza col terreno.

Soluzione. L'accelerazione della vettura alla sommità del dosso è quella di un punto materiale che percorre una traiettoria curva con velocità costante. L'unica componente di accelerazione presente è quella centripeta, diretta dall'auto verso il centro di curvatura del dosso, $\mathbf{a}_P = -\mathbf{v}^2$; Se $|\mathbf{a}$

= g la forza centrifuga - $m\mathbf{a}$

R

$P = v^2$

R

$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$;

sarà un vettore eguale e di segno contrario alla forza peso del veicolo che tenderà quindi a perdere aderenza col terreno. In modulo $|v| =$

$|g| R = 35,65 \text{ km/h}$.

Fig. 5.13. Veicolo che percorre un dosso

5.4 Moti balistici piani

A questa categoria appartengono i moti balistici di corpi, lanciati da terra con una velocità iniziale, con traiettorie giacenti in un piano verticale.

L'unica forza agente sul corpo, se trascuriamo la resistenza dell'aria, è la forza di gravità che imprime al

 Image 362

 Image 363

 Image 364

 Image 365

 Image 366

 Image 367

 Image 368

 Image 369

 Image 370

 Image 371

 Image 372

 Image 373

130

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.14. Il moto balistico

corpo una traiettoria “balistica”, rappresentata da una curva parabolica. Per analizzare il moto, osserviamo che, lungo X si ha un moto uniforme, per l’assenza di forze in quella direzione, lungo Y il moto è uniformemente accelerato, per la presenza della forza gravitazionale. I moti del corpo secondo X e Y sono indipendenti e possono essere studiati separatamente.

Consideriamo ad esempio un corpo balistico, per noi assimilato a un punto materiale, lanciato da terra con velocità v_0 , Fig. 5.14. Se studiamo il moto considerando separatamente le componenti x e y delle velocità, si ha, secondo le (5.2.2): $v_x = v_0 \cos H$;

$$v_y = v_0 \sin H - gt$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

$$x = v_x t = v_0 \cos H * t$$

$$y = v_0 \sin H * t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

(5.4.1)

2

Lo spostamento nella direzione X è rappresentato da una legge lineare col tempo, quello nella direzione Y da una legge parabolica. Considerando che la parabola incontra l’asse X in due punti, per cui si ha $y = 0$, dall’espressione di y nella (5.4.1) si ottiene:

$$v_0 \sin H * t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \text{ da cui } t_1 = 0 \quad t_2 = \frac{2v_0 \sin H}{g}$$

2

g

$$t_1 / 2 = \frac{v_0 \sin H}{g}$$

g

$$v^2 \sin^2 H$$

$$v^2 \sin^2 H$$

$$h = v$$

$$0$$

$$0$$

$$0 \sin H * v_0 \sin H - 1 g$$

$$= 1$$

$$g$$

$$2$$

$$g^2$$

$$2$$

$$g$$

$$\sin 2H$$

$$L = v_0 \cos H * t^2 = v_0 \cos H * 2v_0 \sin H = v_0^2 \sin 2H$$

$$g$$

$$g$$

L è max per $H = 45^\circ$.

(5.4.2)

Le due radici dell'equazione di secondo grado ottenuta ponendo $y = 0$ corrispondono ai tempi in cui il corpo è sull'asse X, all'inizio del moto e al successivo contatto col terreno. La traiettoria parabolica è simmetrica, per cui il tempo a metà percorso permette di calcolare il valore h di massima

elevazione, sostituendo questo tempo nell'espressione di y . Derivando l'espressione di h rispetto a H è facile vedere che,

 Image 374

 Image 375

 Image 376

 Image 377

 Image 378

 Image 379

 Image 380

 Image 381

 Image 382

5.4 Moti balistici piani

131

l'angolo che rende massima la gittata, in assenza della resistenza dell'aria, è uguale a 45° . Altrettanto facile è, eliminando il tempo dalle due espressioni dello spazio percorso secondo X e Y , vedere che la traiettoria ha forma parabolica. Utilizzando le (5.4.1):

$t =$

x

$v_0 \cos H$

x

2

$$y = v_0 \sin H \cdot x$$

x

$$- 1g$$

$$v_0 \cos H$$

2

$$v_0 \cos H$$

1

2

$$y = \tan H x - 1 g$$

x² .

(5.4.3)

2

$$v_0 \cos H$$

Dividendo membro a membro le espressioni di h ed L e esprimendo v₀ in funzione di h e di H nelle (5.4.2) si ottengono relazioni utili per le applicazioni.

√

$$H =$$

$$4h$$

$$2gh$$

$$\text{atan}$$

;

$v_0 =$

.

(5.4.4)

L

sin H

Tutte le relazioni ottenute sino ad ora presuppongono che il punto di partenza e quello di arrivo del corpo, siano alla stessa quota y .

Con relazioni analoghe si può trattare qualunque problema balistico elementare, con condizioni iniziali diverse da quelle esaminate in precedenza (ad esempio un corpo balistico può essere lanciato da una certa quota invece che dal suolo). Non cambiano, in ogni caso, le ipotesi di base, sulla non considerazione della resistenza dell'aria e altri effetti. Se si dovesse tener conto di tutti i fattori che influenzano il volo del corpo, come resistenza dell'aria, effetti giroscopici, variazione della densità dell'aria con la quota etc. la soluzione delle equazioni del moto sarebbe assai più complicata.

I lanci nello sport

Le discipline di lancio, peso, disco, giavellotto, martello, salto in alto e in lungo, sono basate sulla ricerca della massima prestazione. Le tecniche sono profondamente diverse, nelle varie discipline. Non è compito di questo testo trattarle in dettaglio, si rimanda ai testi specialistici di biomeccanica dello sport. È comunque necessario comprendere quali sono le variabili che influiscono sulla prestazione per comprendere le azioni per migliorarla. Trattiamo il problema nel modo più generale, supponendo che l'atleta abbandoni l'attrezzo in un punto dello spazio che assumeremo come origine delle coordinate.

Cominciamo dal calcio, sport nel quale esistono modi molto elaborati di colpire la palla, che influenzano la traiettoria e la gittata. Ci riferiamo a tutti

i possibili calci a

“effetto” che causano il nascere di forze di portanza, con deviazione della traiettoria dal piano. Analizziamo il moto del pallone, considerato come punto materiale. Supponiamo che la quota di arrivo e di partenza siano identiche. In questo caso valgono le (5.4.1) e (5.4.2). La gittata dipende quindi, secondo l’ultima equazione in (5.4.2) dal quadrato della velocità iniziale e dall’angolo H . Ovviamente la velocità iniziale

 Image 383

 Image 384

 Image 385

 Image 386

 Image 387

 Image 388

 Image 389

 Image 390

 Image 391

 Image 392

132

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.15. Il calcio

Fig. 5.16. Il giavellotto

dipende dalla forza con cui il pallone è percosso, l’angolo H dalla posizione del piede rispetto al pallone. Nei lanci lunghi la palla ha una traiettoria

abbastanza alta in quanto la prima delle (5.4.4) mostra che $h = L \tan H$, quindi per $\tan H = 1$ la quota 4

massima raggiunta è un quarto della gittata. Nel lancio lungo i giocatori sul campo non possono interferire con la traiettoria se non alla fine di questa. Nel tiro teso, è necessario imprimere alla palla la massima energia cinetica possibile in direzione orizzontale. In questo caso l'angolo H si riduce a valori molto bassi e la curvatura della traiettoria è appena visibile.

Quando invece il punto di arrivo non è alla stessa quota del punto di partenza, come nel caso del lancio del giavellotto, inserendo la quota y_a del punto di arrivo nelle equazioni (5.4.1) si ottiene:

$$v_{0x} = v_0 \cos H ;$$

$$v_{0y} = v_0 \sin H$$

$$1 \quad gt^2 - v_0 t + y_a = 0$$

2

y

da cui

$$v_{0y} \pm$$

$$v^2 - 2gy$$

0y

a

$$t_{1, 2} =$$

g

$$v_{0x} * v_{0y} \pm$$

$$v^2 * v^2 - v^2 * 2gy$$

$0x$

$0y$

$0x$

a

$L_{1,2} = v_{0x} * t_{1,2} =$

$=$

g

$v^2 * \sin(H) * \cos(H) \pm$

$v^4 * \sin^2(H) \cos^2(H) - v^2 \cos^2(H) * 2gya$

$= 0$

0

0

g

(5.4.5)

 Image 393

 Image 394

 Image 395

 Image 396

 Image 397

5.4 Moti balistici piani

Fig. 5.17. Valore dell'angolo di lancio di gittata massima in funzione della quota (cambiata di segno) del punto di arrivo

Poiché non ha senso considerare valori negativi del tempo, nella seconda e quarta equazione si considera soltanto la radice positiva. La gittata massima corrispondente a una certa velocità v_0 non si ottiene più con angoli di 45° . Il diagramma della Fig. 5.17 mostra i valori dell'angolo di gittata massima, corrispondenti a diversi valori di y_a , riportati, per comodità, nel disegno con i segni cambiati. L'angolo di massima gittata decresce all'aumentare in valore assoluto della quota y . Nel caso del lancio del giavellotto per cui $y_a = -2m$ l'angolo di gittata massima è circa $39,5^\circ$.

Si considera ora un altro caso importante. Si voglia lanciare un oggetto in modo tale che atterri in un punto, le cui coordinate rispetto all'origine, posta nel punto iniziale della traiettoria, siano x, y . Le variabili su cui si può operare sono la velocità iniziale e l'angolo di lancio. Si tenga presente che se questi parametri non sono valutati accuratamente, la palla ricade prima del punto di atterraggio, o lo supera e ricade sul terreno. La velocità iniziale deve essere almeno tale da permettere che l'apice della traiettoria sia più alto della quota y del canestro, ma non molto più alto, per non generare velocità di ricaduta troppo alte sul piano di atterraggio. Per il bilancio di energia cinetica e potenziale si ricordi che nel punto di partenza l'energia cinetica dovuta alla componente verticale è $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$, se ammettiamo che il moto sia

0y

V^2

conservativo. Ammettendo a titolo esemplificativo di porre

$0y = h = 1, 1 * y$

$2g$

a che

corrisponde al fatto che l'apice della parabola superi la quota y_a del 10% si ha: 1

$$V_2 =$$

$$0y$$

$$2, 2gy_a$$

e

$$y_a = V_0 y t - \frac{1}{2} g t^2$$

da cui

$$g t^2 - 2 y_a t + y_a = 0 .$$

(5.4.6)

2

2

Risolvendo l'equazione di secondo grado e considerando soltanto il valore più grande di t perché corrispondente al secondo passaggio della palla sul livello di altezza y_a ,

 Image 398

 Image 399

 Image 400

 Image 401

 Image 402

 Image 403

 Image 404

 Image 405

 Image 406

 Image 407

 Image 408

 Image 409

134

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.18. Il lancio nel basket

si ha:

$$V_{0y} +$$

$$V^2 - 2g * y$$

$$V$$

$$0, 2 * V^2$$

$$0y$$

$$0y +$$

$$0y$$

$$V_{0y}$$

$$t =$$

$$=$$

$$= 1, 45$$

.

(5.4.7)

g

g

g

Trovato il tempo t si otterrà:

$$V_{0x} = x$$

$$\tan H = V_{0y} .$$

(5.4.8)

t

V_{0x}

Nel caso in cui la quota y sia di 2 m e la distanza x di 1 m si ha: $V^2 =$

=

$0y$

$$2,2 * 9,81 * 2 = 43,16 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

e

V_{20y}

$$6,57 \text{ m/s}$$

$$6,57$$

$$t = 1,45$$

$$= 0,97 \text{ s}$$

$$V_{0x} = 1 = 1,03 \text{ m/s}$$

g

$$0,97$$

$$\tan H = 6,57 = 6,38 \quad H = 81,09^\circ$$

$$1,03$$

Il salto in lungo

Cerchiamo di analizzare i principali parametri che influiscono sulla lunghezza del salto. Si tratta, anche in questo caso, di un moto balistico, nel quale la massa del **Fig. 5.19**. Il salto in lungo

 Image 410

 Image 411

5.4 Moti balistici piani

135

Fig. 5.20. Una tecnica di salto in lungo

corpo dell'atleta può essere considerata come un punto materiale. La lunghezza del salto dipende dalla combinazione della componente orizzontale della velocità, risultante dalla rincorsa, e di quella verticale, dovuta all'azione di elevazione e stacco al contatto con la pedana. Un fattore fondamentale per ottenere una buona prestazione è un'elevata velocità della rincorsa. La componente verticale viene ottenuta da un movimento complesso della gamba di battuta, costituito da un'estensione rapida dell'anca, dall'estensione del ginocchio e dalla flessione plantare della caviglia. Questi movimenti generano una forza diretta verso l'alto, cui corrisponde una componente verticale di accelerazione. L'angolo ottimale della velocità risultante si aggira intorno a 40° , perché la quota di arrivo e

quella di partenza del baricentro non sono eguali. Le forze muscolari non riescono a raggiungere valori sufficienti per ottenere quest'angolo. I valori comunemente ottenuti non superano 22° . Nella pratica sportiva la componente orizzontale della velocità è intorno ai 9 m/s per un atleta di medie prestazioni, corrispondente al tempo di 11 s nei 100 m di corsa. Se si osserva la direzione della forza esercitata dal suolo sul piede dell'atleta al momento dello stacco, si nota che questa produce un moto di elevazione del corpo, ma anche una rotazione nel senso piedi-testa, oraria dal nostro punto di osservazione. Questa rotazione deve essere contrastata, poiché tende a portare i piedi al disotto o dietro la verticale del baricentro, peggiorando notevolmente la qualità del salto. Le diverse tecniche si differenziano per il contrasto che esercitano alla rotazione testa-piedi. Nella Fig. 5.20, l'atleta dopo lo stacco piega il corpo con le braccia e le gambe distese in avanti. In questo modo riduce al minimo la resistenza dell'aria durante il volo. Lo svantaggio principale di questa tecnica è che si riduce il momento d'inerzia del corpo, che non può contrastare la tendenza alla rotazione testa-piedi. Questa tecnica è adottata da molti saltatori. In altre tecniche il saltatore, dopo lo stacco, solleva le braccia e porta avanti la gamba tesa, per ruotarla poi violentemente all'indietro, portando la gamba **Fig. 5.21**. Una tecnica alternativa nel salto in lungo

 Image 412

136

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.22. Una tecnica nel salto in alto

di battuta piegata in avanti. Poiché non sono presenti forze esterne, il momento della quantità di moto deve mantenersi costante. Il momento della quantità di moto della gamba tesa è maggiore di quello della gamba piegata, deve nascere una rotazione antioraria, con riferimento al nostro punto di vista, che contrasta la rotazione oraria di cui si è parlato. Nel caso di grandi campioni, al movimento descritto si aggiunge un altro passo in aria, che contribuisce ulteriormente a contrastare la rotazione oraria del saltatore.

Il salto in alto

Senza entrare in un'articolata discussione sulle tecniche per il salto in alto, osserviamo che la traiettoria del baricentro del corpo, in corrispondenza del quale si trova il punto materiale che lo rappresenta, non può più essere cambiata una volta che il saltatore si è staccato da terra. Si tratta infatti di un sistema isolato. Qualunque movimento dei segmenti corporei durante il volo potrà soltanto cambiare la posizione relativa del baricentro rispetto al corpo. Nel salto in alto la rincorsa ha importanza soltanto per la preparazione al moto al distacco da terra, con una componente di velocità verticale più alta possibile e con un angolo rispetto all'orizzontale più elevato possibile. Si ricordi a questo proposito la terza equazione nelle (5.4.2). Con riferimento alla tecnica ventrale, rappresentata nella Fig. 5.21, il penultimo passo, prima dello stacco, deve essere compiuto con il baricentro nella posizione più bassa possibile. A questo segue l'estensione dell'anca, del ginocchio e la flessione plantare della caviglia. La flessione del tronco durante il passaggio dell'asticella porterà il baricentro fuori dal corpo. Osservando la figura si può notare che il saltatore supera l'asticella, mentre la traiettoria del baricentro passa al disotto di questa. La gamba avanzata è lanciata energicamente verso l'alto. Alla quantità di moto della gamba deve corrispondere un impulso corrispondente da parte del terreno, che incrementa quello generato attraverso l'estensione del ginocchio, della caviglia e dell'anca.

 Image 413

 Image 414

 Image 415

5.4 Moti balistici piani

137

Esercizi

1.

Ammettendo che nel salto in lungo il movimento dell'atleta sia rappresentato dalla traiettoria del suo baricentro, s'immagini che un atleta compia un salto di 8 m restando in aria per 1 s. Si calcoli la velocità e

l'angolo della traiettoria al distacco da terra e la massima altezza raggiunta dal baricentro.

2.

Con l'usuale ipotesi che il moto dell'atleta sia rappresentato da quello del suo baricentro, si consideri un saltatore in lungo la cui prestazione sia di 8,65 m con un'elevazione massima di 1,35 m. Qual è la velocità al distacco? Discutere come l'atleta può migliorare le sue prestazioni.

3.

Durante l'allenamento un lanciatore di peso lancia a una distanza di 9 m. Al momento del distacco l'attrezzo dista 1,9 m da terra e l'angolo di rilascio è pari a 27° . Si calcoli la velocità al rilascio dell'attrezzo, quella all'atterraggio e il tempo totale di volo.

4.

Un tuffatore salta da una piattaforma a un'altezza, riferita al baricentro, di 10,5 m e arriva in acqua a una distanza orizzontale dalla base della piattaforma di 5 m. Se il tempo totale di permanenza in aria è di 2,5 s, si calcoli la velocità all'inizio del salto e l'angolo relativo.

5.

Un saltatore sugli sci lascia la pedana con una velocità orizzontale pari a v_0 e atterra su una pista inclinata di 45° sull'orizzonte. Se lo sciatore tocca la pista a una distanza L di 50 m dalla base della rampa, si determini la velocità al distacco, quella all'atterraggio, e il tempo totale di volo.

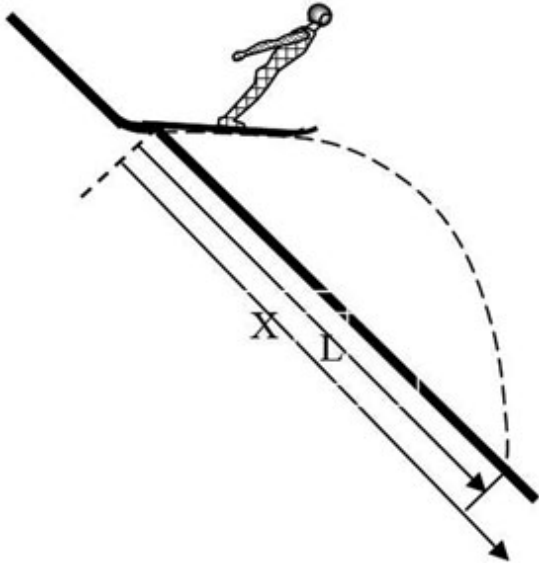


Image 418

138

5 Elementi di cinematica

5.5 Moto relativo

Si considerino due sistemi di riferimento con l'origine comune, il primo [A] fisso, il secondo [B] mobile. Si consideri anche un punto P , mobile rispetto ad ambedue i riferimenti. Il passaggio dal sistema di riferimento [B] a [A] è, come di consueto, effettuato attraverso la matrice di rotazione A

$B R$. Si ha:

$$A r P = A B R B r P .$$

(5.5.1)

Prima di ottenere le espressioni per la velocità e accelerazione di P rispetto ai due sistemi, occorre ricordare che la derivata della posizione di un punto riferita a un sistema di coordinate rappresenta la velocità del punto relativa a quel sistema. Questo implica che se un punto è solidale a un sistema di

riferimento, la derivata della sua posizione rispetto a quel sistema è nulla. Esprimendo la posizione di \mathbf{P} rispetto ad

[A] e [B] otteniamo:

\mathbf{Ar}

B

$$\mathbf{P} = A_x \mathbf{i}_A + A_y \mathbf{j}_A + A_z \mathbf{k}_A$$

$$\mathbf{r}_P = B_x \mathbf{i}_B + B_y \mathbf{j}_B + B_z \mathbf{k}_B .$$

(5.5.2)

Se deriviamo \mathbf{Br}_P rispetto al sistema [B], i versori \mathbf{i}_B , \mathbf{j}_B , \mathbf{k}_B dovranno essere considerati immutabili in direzione e modulo. Se deriviamo lo stesso vettore rispetto al **Fig. 5.23**. Rotazione relative di due sistemi con

l'origine in comune

 Image 419

 Image 420

 Image 421

 Image 422

 Image 423

 Image 424

5.5 Moto relativo

139

sistema [A] i versori \mathbf{i}_B , \mathbf{j}_B ,

\mathbf{k}_B dovranno essere considerati mobili rispetto ad [A].

Utilizzando due indici, uno per indicare il sistema rispetto cui si deriva, l'altro quello di riferimento del vettore che si deriva si ha:

B

B

B

d

d

v

B

P =

rP =

$$(B_x^P \mathbf{i}_B + B_y^P \mathbf{j}_B + B_z^P \mathbf{k}_B) = (B \dot{x}^P \mathbf{i}_B + B \dot{y}^P \mathbf{j}_B + B \dot{z}^P \mathbf{k}_B) = B \mathbf{v}^P, R$$

dt

dt

B

B

d

a

B

P =

$$\mathbf{v}^P = (B \ddot{x}^P \mathbf{i}_B + B \ddot{y}^P \mathbf{j}_B + B \ddot{z}^P \mathbf{k}_B) = B \mathbf{a}^P, R.$$

(5.5.3)

dt

Se ora deriviamo lo stesso vettore \mathbf{BrP} rispetto al sistema A, otteniamo: Ad

A

B

d

$\mathbf{rP} =$

$$(\mathbf{BxP} \mathbf{iB} + \mathbf{ByP} \mathbf{jB} + \mathbf{BzP} \mathbf{kB}) = (\mathbf{B} \dot{xP} \mathbf{iB} + \mathbf{B} \dot{yP} \mathbf{jB} + \mathbf{BzP} \mathbf{kB}) +$$

dt

dt

$$+ (\mathbf{BxP} * (\mathbf{F} \times \mathbf{iB}) + (\mathbf{ByP} * (\mathbf{F} \times \mathbf{jB}) + (\mathbf{BzP} * (\mathbf{F} \times \mathbf{kB})) =$$

$$= \mathbf{B} \dot{\mathbf{rP}} + \mathbf{F} \times \mathbf{BrP} = \mathbf{BvP}, R + \mathbf{BvP}, T .$$

(5.5.4)

Il risultato precedente dice che la derivata rispetto al sistema [A] del vettore \mathbf{BrP} è la somma della velocità di \mathbf{P} relativa a [B] e di un termine, *velocità di trascinamento*, dovuto alla rotazione del sistema di riferimento [B] rispetto al sistema [A]. Occorre osservare che la velocità *assoluta* del punto \mathbf{P} ottenuta è ancora espressa rispetto al sistema di riferimento [B]. Nel seguito eviteremo, per aggirare la complicazione del doppio indice, di derivare rispetto a un sistema differente da quello di riferimento del vettore. Nel caso precedente per ottenere la velocità di P rispetto al sistema [A]

dovremo utilizzare la matrice A

$\mathbf{B R}$, ottenendo infine:

$\mathbf{AvP} = \mathbf{ABRB}^T \mathbf{rP} + \mathbf{F} \times \mathbf{ABRBrP} = \mathbf{ABRBvP}, \mathbf{R} + \mathbf{F} \times \mathbf{ABRBrP} =$
 $\mathbf{ABRBvP}, \mathbf{R} + \mathbf{F} \times \mathbf{ArP}.$ (5.5.5) Il risultato precedente si può ottenere anche
 per altra via, utilizzando le matrici di rotazione. Si ha, infatti:

$$\mathbf{ArP} = \mathbf{ABRBrP}$$

A

A

d

v

.

.

P =

(A

$\mathbf{RBrP} + \mathbf{A}$

\mathbf{RA}

$\frac{d}{dt} \mathbf{BRBrP}) = \mathbf{A}$

B

$\mathbf{B RB}^T$

$\mathbf{rP} = \mathbf{A}$

B

$\mathbf{B RTArP} + \mathbf{A}$

$\mathbf{B RB}^T$

\mathbf{r}_P .

(5.5.6)

Dall'espressione precedente si deduce che velocità di trascinamento e relativa sono rispettivamente date da:

\mathbf{A}_v

.

\mathbf{A}

$\mathbf{P}, \mathbf{T} = \mathbf{A}$

$\mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{A}$

$\mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{r}_P$

$\mathbf{v}_P, \mathbf{R} = \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{B}' \mathbf{r}_P$.

(5.5.7)

Ricordando che:

\mathbf{A}

$\mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{A}$

$\mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{T} = \mathbf{I}$

derivando si ha:

\mathbf{A}'

.

.

.

$B R A$

$B R T + A$

$B R A$

$B R T = A$

$B R A$

$B R T + (A$

$B R A$

$B R T)T = 0$

indicando con S la matrice $A \cdot$

$B R A$

$B R T$ si ha:

$S + S^T = 0 .$

(5.5.8)

140

5 Elementi di cinematica

La matrice S è quindi antisimmetrica della forma:

[

]

$0 \quad -^*z$

*y

$$s = \begin{bmatrix} * \\ \end{bmatrix}$$

]

z

$$0 - *x .$$

(5.5.9)

$$- *y *x$$

0

Tornando all'espressione della velocità del punto P poichè si ha:

[

] [

] [

] [

$$0 - *$$

A

A

A

z

$$*y \{ x_P \} \{ *y z_P - *z y_P \}$$

SAr

[

J A

A

A

P =

*z

0 - *x

yP

*z xP - *x zP

-*

[A] = [

A

A

J =

y

*x 0

zP

*x yP - *y xP

[

] [

]

$\{ *$

A

 $x \{$ $\{ xP \}$ $= *$

A

 $\{ x$

yP

 $* \int \times [A] = \mathbf{F} \times \mathbf{ArP}$ si ottiene quindi x

zP

$$\mathbf{AvP} = \mathbf{SArP} + \mathbf{ABRB} \dot{\mathbf{rP}} = \mathbf{F} \times \mathbf{ArP} + \mathbf{ABRBvP} .$$

(5.5.10)

Com'è stato detto il primo termine prende il nome di velocità di trascinamento, quella cioè che il punto P avrebbe se fosse solidale al sistema B e trascinato da questo nel suo moto rispetto al sistema A. Il secondo termine è la velocità di P rispetto al sistema mobile. Ricordando le regole di derivazione dei vettori si può facilmente ricavare l'accelerazione:

Aa

.

 $\mathbf{P} = \dot{\mathbf{rP}}$

$$\mathbf{F} \times \mathbf{ArP} + \mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{ArP}) + \mathbf{F} \times \mathbf{A} \dot{\mathbf{rP}} + \mathbf{ABRBvP} + \mathbf{ABRBaP}$$

$$= \dot{\mathbf{F}} \times \mathbf{Ar}$$

$$\mathbf{P} + \mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{ArP}) + \mathbf{F} \times \mathbf{AvP} + \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{v} \mathbf{P} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbf{a} \mathbf{P}$$

$$= \mathbf{F} \times \mathbf{ArP} + \mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{ArP}) + \mathbf{F} \times \mathbf{AvP} + \mathbf{F} \times \mathbf{AvP} + \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbf{a} \mathbf{P}$$

$$= \{ \mathbf{F} \times \mathbf{ArP} + \mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{ArP}) \} + \{ \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{B} \mathbf{a} \mathbf{P} \} + \{ 2 * (\mathbf{F} \times \mathbf{AvP}) \}$$

$$= \mathbf{a} \mathbf{P}, \mathbf{T} + \mathbf{a} \mathbf{P}, \mathbf{R} + \mathbf{a} \mathbf{P}, \mathbf{C} .$$

(5.5.11)

Il primo termine dell'ultima equazione rappresenta l'accelerazione di trascinamento, costituita dalla somma dell'accelerazione centripeta e di quella tangenziale. Il secondo rappresenta l'accelerazione relativa del punto P rispetto al sistema mobile. L'ultimo termine è l'accelerazione di Coriolis, la cui esistenza è giustificata nel seguito.

Nel caso in cui il sistema mobile abbia, rispetto a quello fisso, un moto di traslazione oltre che di rotazione, occorre aggiungere nelle espressioni precedenti la velocità e l'accelerazione dell'origine del sistema mobile rispetto al fisso. Nella Fig. 5.24 sono presenti per chiarezza tre sistemi di riferimento. Il primo [0] è fisso, il secondo [A]

traslato rispetto al sistema fisso, il terzo [B] traslato e ruotato rispetto ad [A], con cui ha l'origine in comune. Si otterrà quindi:

$$\mathbf{0vP} = \{ \mathbf{vO} + \mathbf{F} \times \mathbf{Ar}$$

$$+ \{ \mathbf{A}$$

(5.5.12)

B

P } T

B RBvP } R

0aP = {aO + 'F × Ar

+ { A

+ { 2 * (F × Av

.

B

P + F × (F × ArP) } T

B RBaP } R

P) } C

Nelle relazioni precedenti gli indici posti a destra delle parentesi indicano rispettivamente i termini di trascinamento, relativi e di Coriolis. Per spiegare con un esempio l'accelerazione di Coriolis, s'immagini che un osservatore fisso veda una piattaforma

 Image 425

5.5 Moto relativo

141

Fig. 5.24. Sistemi traslati e ruotati

ruotare intorno al suo asse. Sulla piattaforma, Fig. 5.25, è posto un dischetto circolare che viene lanciato radialmente verso la periferia. Si ammetta che tra il dischetto e la piattaforma non esista alcuna azione di attrito e trascinamento. Quando il dischetto raggiunge la periferia, l'osservatore fisso lo ha visto percorrere una traiettoria rettilinea, mentre la piattaforma ha ruotato di un certo angolo. Per un osservatore a bordo del disco rotante, la

traiettoria del dischetto è curva perché il disco ruota mentre il dischetto si muove radialmente. L'osservatore non potrà che giustificare lo scostamento dalla traiettoria radiale di un oggetto cui non è applicata alcuna forza, se non con la presenza di un'accelerazione e quindi di una forza fittizia tangenziale, tanto maggio-1)

2)

3)

4)

Fig. 5.25. Accelerazione di Coriolis

 Image 426

 Image 427

 Image 428

 Image 429

 Image 430

 Image 431

 Image 432

 Image 433

142

5 Elementi di cinematica

re quanto più elevate sono la velocità relativa del dischetto rispetto alla piattaforma e la velocità angolare del disco. Vediamo ora di trovare un'espressione quantitativa per l'accelerazione di Coriolis, utilizzando l'esempio precedente. Considerando la seconda immagine nella sequenza, supponiamo che il dischetto sia giunto a una distanza dal centro data dalla relazione $r_1 = vt_1$, nel tempo t_1 trascorso dall'inizio dell'esperimento. Nello

stesso tempo, in corrispondenza del raggio r_1 , il dischetto ha compiuto uno spostamento circonferenziale dovuto alla rotazione del disco pari a $c_1 = Fr_1 * t_1 = Fv_1 t_2$.

1

Successivamente, al tempo t_2 lo spostamento radiale e quello circonferenziale saranno:

$$r_2 = vt_2$$

$$c_2 = Fr_2 * t_2 = Fv_2 * t_2 .$$

2

Ricordando che in un moto uniformemente accelerato lo spazio percorso ha l'espressione

$$c = \frac{1}{2} at^2 = Fvt_2 \text{ si deduce che } a = 2Fv .$$

2

Il moto circonferenziale del dischetto è quindi un moto accelerato con il modulo dell'accelerazione pari a $a = 2Fv$, essendo F la velocità di rotazione del disco e v la velocità radiale relativa del dischetto. L'accelerazione di Coriolis è diretta circonferenzialmente, in senso opposto a quello di rotazione del disco e varia linearmente col raggio. Una dimostrazione vettoriale dell'esistenza dell'accelerazione di Coriolis si può proporre ricordando che nell'esperimento presentato, la posizione del dischetto, rispetto al sistema fisso è un vettore diretto come l'asse X e il versore \mathbf{i} . La sua espressione è quindi $\mathbf{r} = r \mathbf{i}$. Per lo studio del moto è del tutto equivalente che consideriamo il sistema solidale al disco rotante con velocità angolare F rispetto al sistema fisso, o quest'ultimo rotante con velocità angolare $-F$ rispetto al sistema (prima) mobile.

Derivando l'espressione della posizione due volte rispetto al sistema (prima) mobile si ottiene:

$$\mathbf{v} = d(\mathbf{r}\mathbf{i}) = dr \mathbf{i} - \mathbf{F} \times \mathbf{r} \mathbf{i} dt$$

dt

$\frac{d^2(\mathbf{r}_i)}{dt^2}$

$\mathbf{a} =$

$-\frac{d}{dt}(\mathbf{F} \times$

\times

$\frac{d}{dt}$

$\mathbf{i}) - \frac{d\mathbf{F}}{dt}$

$\mathbf{r}_i - \mathbf{F} \times (-\mathbf{F} \times \mathbf{r}_i) - \mathbf{F} \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$

dt

dt

dt

$= -2\mathbf{F} \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} - \mathbf{F} \times (-\mathbf{F} \times \mathbf{r}_i).$

(5.5.13)

dt

Il lettore attento riconoscerà nel primo termine dell'ultima espressione nella (5.5.13), l'accelerazione di Coriolis, nel secondo l'accelerazione centripeta del dischetto, prodotta quest'ultima dalla curvatura della traiettoria e anch'essa "virtuale", cioè non corrispondente a forze realmente presenti nel sistema.

Le forze di Coriolis sono responsabili della deviazione apparente dei venti dalla direzione teorica tangente alle isobare, come vorrebbe l'aerodinamica. In Fig. 5.26

precedente è rappresentata la rotta reale rispetto alla terra di un aereo che vola da nord verso sud secondo le indicazioni della bussola. La rotazione

della terra farà in modo che la traiettoria sia, per un osservatore terrestre, una linea curva inclinata verso ovest rispetto alla linea di volo desiderata. Chiaramente un osservatore esterno, non basato sulla terra, vedrebbe la traiettoria dell'aereo seguire una linea meridiana. Le

 Image 434

 Image 435

 Image 436

 Image 437

 Image 438

 Image 439

 Image 440

5.5 Moto relativo

143

Fig. 5.26. Deviazione dei venti per l'accelerazione

di Coriolis

accelerazioni di Coriolis sono quindi accelerazioni apparenti introdotte per giustificare il comportamento del corpo mobile rispetto a un sistema di riferimento rotante o comunque in moto accelerato.

Esempio 5.7. Il sistema articolato in Fig. 5.27 è costituito da due aste unite mediante un giunto rotoidale in A, mentre in O un altro giunto rotoidale collega la prima asta al telaio. Sono dati le lunghezze l_1, l_2 delle aste, gli angoli F_1, F_2 e le velocità angolari delle due aste, tenendo presente che la velocità angolare $F_2 = \frac{dF_2}{dt}$ è quella della

seconda asta rispetto alla prima.

La velocità angolare della seconda asta rispetto al sistema fisso è, infatti, data dalla somma $\mathbf{F1} + \mathbf{F2}$. Si vogliono determinare velocità e accelerazione del punto B.

Ricordando quanto detto a proposito della derivazione di vettori variabili, si ha: $\mathbf{vB} = d\mathbf{rA} + d\mathbf{rAB} = \mathbf{vA} + \mathbf{vAB} = \mathbf{F1} \times \mathbf{rA} + (\mathbf{F1} + \mathbf{F2}) \times \mathbf{rAB}$

dt

dt

$$\mathbf{aB} = d\mathbf{vA} + d\mathbf{vAB} = \mathbf{aA} + \mathbf{aAB} =$$

dt

dt

$$= \mathbf{aA} + (\mathbf{F1} + \mathbf{F2}) \times ((\mathbf{F1} + \mathbf{F2}) \times \mathbf{rAB}) + (\dot{\mathbf{F1}} + \dot{\mathbf{F2}}) \times \mathbf{rAB} .$$

(5.5.14)

Fig. 5.27. Accelerazione di Coriolis in un sistema articolato

 Image 441

 Image 442

144

5 Elementi di cinematica

Per commentare le espressioni precedenti si può osservare che il punto A si muove di moto circolare intorno a o con velocità $\mathbf{F1} \times \mathbf{rA}$ mentre il punto B ruota intorno ad A con velocità angolare $\mathbf{F1} + \mathbf{F2}$. Possiamo quindi dire, secondo il teorema di Rivals, che *la velocità di un punto B appartenente a un corpo rigido in moto generale è pari alla velocità di un altro punto A del corpo sommata con la velocità di B nel moto relativo di B rispetto ad A.* Nel

nostro caso il moto relativo di B rispetto a A è proprio un moto di rotazione con velocità $\mathbf{F1} + \mathbf{F2}$. L'espressione della velocità del punto B

può essere elaborata come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{F1} \times \mathbf{r}_A + (\mathbf{F1} + \mathbf{F2}) \times \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{F1} \times (\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}) + \mathbf{F2} \times \mathbf{r}_{AB} \\ &= \mathbf{F1} \times \mathbf{r}_B + \mathbf{F2} \times \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{v}_{t, B} + \mathbf{v}_{r, B} . \end{aligned}$$

(5.5.15)

La velocità di B può quindi anche essere pensata come somma di due termini, il primo, velocità di trascinamento, rappresenta la velocità che il punto B avrebbe se l'asta AB fosse solidale all'asta OA e lo snodo in A non esistesse, il secondo termine è dovuto alla velocità relativa dell'asta AB o del sistema mobile a essa solidale rispetto all'asta OA.

Esiste anche una terza possibilità per calcolare la velocità e l'accelerazione del punto B, derivando direttamente le componenti del vettore \mathbf{r}_B . Abbiamo in questo caso:

$$\begin{aligned} & \left[\right. \\ & \left. \right\} l_1 \cos(H_1) + l_2 \cos(H_1 + H_2) \left\{ \right. \\ \mathbf{r}_B &= \left[l_1 \sin(H_1) + l_2 \sin(H_1 + H_2) \right] \\ & 0 \\ & \left[\right. \\ & \left. \right\} - l_1 \sin(H_1) F_1 - l_2 \sin(H_1 + H_2) (F_1 + F_2) \left| \right. \end{aligned}$$

{

$$v_B = dr_B =$$

l

=

dt

|

$$\left[l_1 \cos(H_1) F_1 + l_2 \cos(H_1 + H_2) (F_1 + F_2) \right]$$

]

0

$$= \mathbf{F}_1 \times \mathbf{r}_A + (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \times \mathbf{r}_{AB}$$

[

]

|

| -

-

$$\left[l_1 \cos(H_1) * F_2 - l_1 \sin(H_1) * F_1 - l_2 * \right]$$

|

|

1

|

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\theta} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{AB} + \dot{\theta}^2 \mathbf{r}_{AB}$$

|

|

|

|

0

$$= \mathbf{a}_A + (\dot{\theta} \mathbf{k} \times \mathbf{v}_A) + (\dot{\theta} \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{AB}) + \dot{\theta}^2 \mathbf{r}_{AB} .$$

(5.5.16)

Sono così verificate le espressioni precedenti. Il teorema di Rivals si presta bene a calcoli di velocità e accelerazione in sistemi articolati, perché le procedure relative possono essere agevolmente trascritte in un programma per l'elaboratore. Un approccio più generale al calcolo delle velocità dei punti di un sistema costituito da più corpi si ha ricorrendo alle matrici di trasformazione omogee. Utilizzando l'esempio delle due aste riportato sopra ricordiamo che:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{O}^T \mathbf{r}_B .$$

(5.5.17)

 Image 443

 Image 444

5.5 Moto relativo

145

La relazione precedente mostra che la posizione del punto B rispetto al sistema di base è il prodotto di una matrice di trasformazione \mathbf{O}^T dipendente dagli angoli H

2

1, H2

variabili nel tempo e di un vettore $2\mathbf{r}_B$ che, essendo il punto B solidale al sistema di riferimento 2, non varia nel tempo. Si ha allora semplicemente:

∂

$\mathbf{v}_B =$

(0

$\partial_t 2\mathbf{T}) * 2\mathbf{r}_B$

$\partial^2 \text{\$ \%}$

a

0

B =

* 2

∂

$\mathbf{r}_B .$

(5.5.18)

$t^2 2\mathbf{T}$

Nel caso in esame abbiamo:

[]

[

] [

⌈

⌈ ⌈

|

| 0

2

2

{ rx |

|

|

| rx |

|

cH1 - sH1 0 0

cH2 - sH2 0 11 |

| rx |

|

0

{

}

{

} }

r

2

|

||

| 2

y

= 0

ry

= | sH1 cH1 0 0 || sH2 cH2 0 0 |

ry

|

|

1T * 0

1T

|

||

|

{ 0 |

|

|

|

|

{ 0 |

|

J

0

0

1 0

0

0

1 0 |

|

{ 0 |

|

J

1

1

0

0

0 1

0

0

0 1

1

[

]]

cH12 - sH12 0 l1cH1 | l2 |

|

||

} |

↳

= | sH12 cH12 0 l1sH1

0

L

|

.

(5.5.19)

0

0

1

0] |

|

{0|

|

J

0

0

0

1

1

Da cui derivando:

[

] []

- sH₁₂F₁₂ - cH₁₂F₁₂ 0 - l₁sH₁F₁ | l₂ |

|

||

} |

}

0

- cH

0

v

|

12F12

- sH12F12 0

11cH1F1 |

B = [

=

0

0

1

0

] |

|

{0 |

|

J

0

0

0

1

1

[

]

|

| -

{ 11sH1F1 - sH12F12l2 |

|

}

= - 11sH1F1 - cH12F12l2

|

|

l

0

|

|

J

1

[

]]]

- cH12F2 - sH12 'F12 - sH12F2 - cH12 'F12 0 - l1cH1F2 - l1sH1 'F1
|12|

|

12

12

1

||

{ |

}

0

- sH

- cH

- sH

- l

0

a

|

12F2

12

12 ·

F12 - cH12F212

12 ·

F12 0 - 11sH1F21 1cH1 `F1 |

B = [

=

0

0

1

0

] |

|

[0 |

|

] |

0

0

0

1

1

[

]

|

| -

+

+

{ l1(cH1F2 sH

sH

|

1

1 ·

F1) - l2(cH12F212

12 ·

F12) |

{

= - l1(sH1F2 + cH

+ cH

1

1 ·

F1) - l2(sH12F212

12 ·

F12)

|

(5.5.20)

|

|

0

|

|

J

1

con $H_{12} = H_1 + H_2$ $F_{12} = F_1 + F_2$.

È immediato verificare che le espressioni ottenute sono identiche a quelle ricavate col teorema di Rivals o con le leggi del moto relativo. Nel caso rappresentato non è presente l'accelerazione di Coriolis perché il punto B è solidale al sistema di riferimento mobile.

Esempio 5.8. Una barca a vela si muove nella direzione indicata, di bolina, contro un vento da nord, con uno strumento di bordo che indica una velocità della barca di

 Image 445

146

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.28. Moto relativo

6,5 nodi. Un indicatore di direzione del vento (un piccolo nastro appeso a una sartia) mostra che la direzione del vento apparente forma un'angolo di

($180^\circ + 35^\circ$) con l'asse della barca. Qual è il modulo della velocità assoluta del vento?

Risposta. $v_w = 19,23$ nodi.

Si tratta di un problema la cui soluzione è basata sull'espressione della velocità nel moto relativo, prima presentata. Assumendo un sistema di assi fisso e uno solidale alla barca, come in Fig. 5.28, si ha:

0

$$\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{1R} \mathbf{1}v_w + \mathbf{0}v_B .$$

L'espressione precedente mostra che la velocità del vento è data dalla somma vettoriale della velocità del vento rispetto alla barca, riportata al sistema X_0, Y_0 , e della velocità della barca, espressa sempre rispetto al sistema fisso. Si ha quindi:

[

] [

] [

] [

] [

{ 0 }

$$\cos(-50) - \sin(-50) \mathbf{0} \left\{ \mathbf{1}v_w \sin(35) \right\} \left\{ 6,5 * \sin(50) \right\}$$

0

= [

]

+

.

$[v_w, Y]$

$\sin(-50)$

$\cos(-50)$

$0 [-1v_w \cos(35)] [6, 5 * \cos(50)]$

0

0

0

1

0

0

La relazione vettoriale scritta sopra porta a due relazioni scalari utili (la terza è un'identità), nelle due incognite v_w , $0v_w$, Y . Svolti i semplici calcoli, si trova: $1v_w = 19,23$ nodi $0v_w$, $Y = -14,4$ nodi.

Il nodo (in inglese "knot") è una misura di velocità usata nella navigazione. Esso equivale a 1,851 km/h. In tutti gli esempi presentati il corpo in esame è stato considerato come un punto materiale, identificando cioè il corpo con il suo baricentro.

5.6 Cinematica del corpo rigido

Abbiamo visto che, nella cinematica del punto, il corpo in esame è assimilato a un corpo puntiforme, posto in corrispondenza del baricentro e di massa eguale a quella

 Image 446

 Image 447

 Image 448

 Image 449

 Image 450

5.6 Cinematica del corpo rigido

147

Fig. 5.29. Moto di un corpo rigido

reale. Quest'operazione non produce un sistema dinamicamente equivalente, perché due sistemi equivalenti devono avere lo stesso baricentro, la stessa massa e la stessa matrice d'inerzia rispetto al baricentro. In molti casi la semplificazione dell'analisi compensa le approssimazioni introdotte. Se si vuole considerare un corpo rigido nella sua capacità di traslare e ruotare, si parte dalla considerazione che la posizione di un corpo rigido nello spazio è definita da 6 parametri. Se definiamo posizione e orientamento del corpo mediante un sistema Cartesiano a esso solidale, i 6 parametri possono essere le coordinate dell'origine e tre angoli (ad esempio gli angoli di Eulero). Considerando due punti generici A,B appartenenti al corpo, possiamo stabilire facilmente le relazioni tra velocità e accelerazione. Con riferimento alla Fig. 5.29, si ha:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}$$

(5.6.1)

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \mathbf{v}_A + \mathbf{F} \times \mathbf{r}_{AB}$$

(5.6.2)

$\frac{d}{dt}$

$\frac{d}{dt}$

$$\mathbf{a}_B = d\mathbf{v}_A + d\mathbf{v}_{AB} = \mathbf{a}_A + \mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{r}_{AB}) + \dot{\mathbf{F}} \times \mathbf{r}_{AB}.$$

$$\frac{d}{dt}$$

dt

dt

Le relazioni precedenti indicano, in armonia con la legge di Rivals, che la velocità e l'accelerazione di B si ottengono sommando alla velocità e all'accelerazione di A le componenti di velocità e accelerazione nel moto relativo (di rotazione) di B rispetto ad A. Ricordiamo che la distanza \mathbf{r}_{AB} è costante in quanto rappresenta la distanza tra due punti di un corpo rigido.

Esempio 5.9. Una clava è lanciata da un giocoliere in modo tale che la velocità angolare sia di 1,5 rad/s e la velocità del punto A di 3 m/s con inclinazione di 30°, come in Fig. 5.30. Determinare la velocità e l'accelerazione del punto B, essendo la distanza AB pari a 0,30 m. Assunto un sistema di coordinate Cartesiane come in Fig. 5.30 si osservi che l'accelerazione di B è soltanto centripeta perché si ha $\mathbf{F} = \text{cost}$

 Image 451

148

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.30. Moto di un corpo rigido

e $\mathbf{v}_A = \text{cost}$. Essa è diretta da B verso A.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2,6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{F} \times \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

0

- 1,5

0

0

$$\mathbf{aB} = \mathbf{aA} + \cdot$$

$$\mathbf{F} \times \mathbf{AB} + \mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{AB}) =$$

[] [

] / [

] [] \ [

]

{ 0 } { 0 }

{ 0 } { 0 }

{ 0 }

=

(

)

-

$$[0] + [0] \times [0] = [0,3] = [0,675] .$$

0

- 1,5

- 1, 5

0

0

5.7 Moti rigidi piani

Un moto viene definito *rigido piano*, quando, considerato un piano solidale al corpo, con giacitura iniziale g , questo si mantiene durante il moto costantemente sovrapposto a un piano fisso anch'esso di giacitura g ; ovvero tutti i punti appartenenti al corpo rigido seguono le stesse leggi temporali di moto su piani paralleli.

Moto di puro rotolamento

Un moto di puro rotolamento è caratterizzato dal fatto che il punto di contatto tra ruota e guida si comporta, per un intervallo di tempo infinitesimo, come se il disco ruotasse intorno a esso. Il punto intorno al quale, nell'intervallo infinitesimo considerato, avviene la rotazione, prende il nome di centro della rotazione istantanea. Il centro istantaneo ha comunque un'accelerazione non nulla. Nel piano del moto è, tuttavia, sempre presente un punto, variabile da istante a istante, per il quale l'accelerazione è nulla. Questo punto prende il nome di polo delle accelerazioni. Ricordando il teorema di Rivals:

In un corpo rigido la velocità di un qualunque punto B è eguale a quella di un altro punto A , sommata vettorialmente alla velocità di B nel moto relativo di B rispetto ad A .

5.7 Moti rigidi piani

149

VP

P

VO

O

r

Fig. 5.31. Rotolamento di un

C

disco su un piano

Applicando il teorema di Rivals ai punti O e C del disco, rispettivamente centro e punto di contatto, si ha:

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_C + \mathbf{F} \times \mathbf{CO} = \mathbf{F} \times \mathbf{CO} .$$

(5.7.1)

Partendo dal modulo della velocità del centro del disco è possibile ricavare il modulo della velocità angolare \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \mathbf{v}_O / r .$$

La velocità di un qualunque punto del disco è:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{F} \times \mathbf{CP}$$

(5.7.2)

da quanto precede, si può dedurre che la velocità di un punto generico del disco è diretta normalmente alla congiungente il centro d'istantanea rotazione col punto considerato. Le accelerazioni dei punti del disco possono essere ricavate impiegando il teorema di Rivals. Nel caso in cui siano conosciute velocità e accelerazione del centro O, si ha:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \mathbf{F} \times \mathbf{OP}$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \dot{\mathbf{F}} \times \mathbf{OP}$$

$$\mathbf{F} \times \mathbf{OP} + \mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{OP}) .$$

(5.7.3)

L'accelerazione del centro istantaneo C risulta:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \dot{\omega} \times \mathbf{OC}$$

$$+ \omega \times (\omega \times \mathbf{OC}) \quad (5.7.4)$$

nel caso in cui il centro O del disco abbia velocità costante, l'accelerazione angolare è nulla e l'accelerazione di C è rappresentata dal vettore $\omega \times \omega \times \mathbf{OC}$, diretto come OC, con verso da C verso O.

Moto di rotolamento con strisciamento

Nel caso in cui si abbia strisciamento sulla guida, il punto di contatto non è più centro di istantanea rotazione.

Se si conoscono le velocità del centro del disco e del punto **K** che nell'istante considerato è a contatto con la guida, sarà facile trovare la posizione del centro istantaneo. Ricaviamo la velocità angolare ω dalla relazione: $\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_K + \omega \times \mathbf{KO}$.

(5.7.5)

 Image 452

 Image 453

150

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.32. Moto di rotolamento con strisciamento

Fig. 5.33. Ricerca del centro istantaneo nel moto

piano. Costruzione grafica

Dove la velocità angolare è l'unica incognita. Si può facilmente trovare la distanza lungo la verticale di C dal punto di contatto, ricordando che \mathbf{v}_C è

nullo, attraverso la relazione:

$$\mathbf{v}_K = \mathbf{v}_C + \mathbf{F} \times \mathbf{CK} .$$

(5.7.6)

Si tenga presente che il verso della velocità \mathbf{v}_K può essere opposto a quello della velocità del centro del disco, come capita ad esempio in una ruota motrice che slitta sul terreno, per un eccesso della coppia applicata alla ruota. Il centro della rotazione istantanea può anche essere trovato con la semplice costruzione grafica indicata in Fig. 5.33. Questa è basata sulla proprietà che, in un intervallo infinitesimo il corpo si comporta come se fosse incernierato in C, quindi i vettori velocità di tutti i punti del corpo hanno una direzione perpendicolare alle congiungenti i punti col centro istantaneo. Prendendo due punti A,B per cui i vettori velocità siano noti in modulo e direzione e tracciando due linee rette normali alle rispettive velocità, si ottiene il centro istantaneo come intersezione delle due linee costruite.

5.8 Moto piano generico

Quando le velocità di tutti i punti di un corpo sono parallele a un piano, la sezione del corpo con il piano del moto si muove restando su questo. Nel moto piano è sufficiente conoscere le velocità di due punti per ottenere la posizione del centro d'istantanea rotazione, e quindi le velocità di tutti gli altri punti. Il processo può essere grafico o analitico. Per via grafica si tracciano le normali alla direzione delle velocità in due

 Image 454

 Image 455

 Image 456

5.8 Moto piano generico

punti in cui questa è conosciuta. L'intersezione delle normali tracciate rappresenta la posizione del centro d'istantanea rotazione. Per via analitica si può scrivere: $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{F} \times \mathbf{AC} = 0$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{F} \times \mathbf{BC} = 0 .$$

(5.8.7)

Le due relazioni vettoriali precedenti corrispondono a quattro scalari (due delle equazioni, quelle concernenti le componenti sull'asse z, sono delle identità) con tre incognite, le due coordinate del centro istantaneo e la componente sull'asse Z della velocità angolare \mathbf{F} . In Nel moto piano, il vettore della velocità angolare è sempre perpendicolare al piano del moto.

Esempio 5.10. L'asta AB può muoversi con gli estremi vincolati a scorrere su due guide, orientate rispettivamente come gli assi X ed Y. Siano date le velocità degli estremi A e B dell'asta. Graficamente la posizione del centro istantaneo per la configurazione del sistema rappresentata in Fig. 5.34, si ottiene tracciando le normali alle velocità dei punti A e B a partire dai punti stessi. Analiticamente si applicheranno le relazioni viste in precedenza:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} v_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} x_C - x_A \\ y_C - 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]; \end{aligned}$$

]

{0}{ } 0 { } 0 { } xC - 0 { }

$$\begin{cases} 0 = \\ \end{cases} \begin{cases} v_B \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \times \begin{cases} y_C - y_B \\ F \end{cases} .$$

0
0
F
0

Le due relazioni precedenti danno, in conclusione:

$$v_A - F y_C = 0$$

$$x_C = x_A$$

$$0 = x_C - x_A$$

y

da cui si ricava

$$C = y_B$$

$$0 = - F(y_C - y_B)$$

$$F = v_A = - v_B .$$

$$0 = v_B + F x_C$$

y_B

x_C

Fig. 5.34. Ricerca grafica del centro istantaneo per un'asta vincolata su due guide

 Image 457

 Image 458

152

5 Elementi di cinematica

5.9 Analisi di un sistema articolato

Come è stato accennato in precedenza, i sistemi articolati sono insiemi di corpi rigidi interconnessi mediante giunti piani o spaziali. I nostri arti superiori ed inferiori sono esempi di sistemi articolati nei quali i vari segmenti, assimilati a corpi rigidi, sono vincolati due a due con vincoli di vario tipo.

Un esempio importante per il vasto campo di applicazione è il quadrilatero articolato piano, un sistema costituito da quattro corpi, in genere di forma allungata, collegati con giunti rotoidali. Negli esempi che considereremo una delle aste è ferma e svolge la funzione di base fissa, il telaio. Nelle rappresentazioni grafiche in genere il telaio si confonde con lo sfondo del disegno e non viene quindi rappresentato. Il quadrilatero articolato è composto da quattro corpi vincolati, con un incastro applicato al telaio, e tre cerniere che collegano gli altri elementi due a due. Applicando la (2.3.1) si trova che il numero dei gradi di libertà del quadrilatero è pari ad uno. I corpi collegati al telaio si chiamano in meccanica manovelle, il corpo opposto biella.

Sia completamente definita la geometria del sistema, in questo caso un quadrilatero articolato con un solo grado di libertà. Siano date la velocità e l'accelerazione angolare della prima asta OA. Partendo dal punto fisso O e analizzando la prima asta si ha:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{OA}$$

$$\mathbf{a}_A = \dot{}$$

$$\mathbf{F}_1 \times \mathbf{OA} + \mathbf{F}_1 \times (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{OA}) .$$

(5.9.1)

Il calcolo analitico delle componenti della velocità e dell'accelerazione di A è elementare, ricordando che i vettori velocità angolare e accelerazione angolare sono diretti come l'asse z ed hanno quindi una sola componente, e che le componenti del vettore OA sono ricavabili dalla geometria nota del meccanismo. È interessante una procedura di calcolo grafico della velocità e dell'accelerazione più rapida e diretta, usando le seguenti proprietà.

•

La velocità di A è un vettore normale a OA, di modulo $\omega \times OA$. Nel caso si vogliano usare costruzioni grafiche, è necessario riportare i vettori sul disegno in scala opportuna. Possono in ogni caso impiegarsi scale diverse per le lunghezze, per le velocità e per le accelerazioni.

•

L'accelerazione di A è la somma di due vettori il primo di modulo $\dot{\omega} \times OA$

$\omega \times OA$, per-

pendicolare a OA, con verso derivato dalla regola delle tre dita della mano destra (pollice secondo $\dot{\omega}$

ω , indice secondo OA, medio secondo la componente cercata

dell'accelerazione), il secondo diretto come OA, da A verso O e modulo $\omega^2 \times OA$.

1

Le componenti di velocità e accelerazione di A sono mostrate in Fig. 5.35.

Per il punto B si applicheranno le relazioni già viste:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB}$$

$$\mathbf{a}_B = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\mathbf{v}}_{AB} = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AB})$$

$F_2 \times \mathbf{AB}$.

(5.9.2)

dt

dt

I poligoni di velocità e accelerazione sono mostrati in Fig. 5.35. Quello d'accelerazione di B è stato spostato per chiarezza, conservando i rapporti e le grandezze dei

Image 459

Image 460

5.9 Analisi di un sistema articolato

153

Fig. 5.35. Il quadrilatero articolato

vettori. Nella costruzione è anche rappresentato il centro d'istantanea rotazione della biella, la cui posizione è utile per la determinazione rapida della velocità angolare F_2 . Infatti, il poligono delle velocità per B non può essere costruito, senza conoscere F_2 . Utilizzando la proprietà secondo la quale il modulo della velocità di A è uguale al prodotto $F_2 \times CA$, si ottiene immediatamente F_2 . Per la costruzione del poligono d'accelerazione di B è necessario conoscere F_3 . Per questo è sufficiente considerare che la velocità v_B , prima determinata, è in modulo uguale a $F_3 \times O_1B$. Si sommeranno quindi in serie i vettori \mathbf{a}_A , $F_2 \times \mathbf{AB}$ e quindi si tratterà una linea indefinita normale 2

ad \mathbf{AB} (linea d'azione di

$F_2 \times \mathbf{AB}$). Per chiudere il poligono è necessario ripartire da B, tracciare il vettore $F_2 \times \mathbf{O}$

1B nel verso da B verso O1 e tracciare una linea

indefinita perpendicolare a questo, che rappresenta la linea d'azione della

F3O1B.

L'intersezione delle linee indefinite prima tracciate fornisce la punta del vettore **aB**.

La Fig. 5.36, mostra i legamenti crociati anteriore e posteriore nell'articolazione del ginocchio. Se immaginiamo che la tibia costituisca il telaio e il condilo femorale, la biella, Il sistema si comporta approssimativamente come un quadrilatero articolato in cui i due bilancieri siano incrociati. È interessante notare che, se il condilo femorale **Fig. 5.36**. I legamenti crociati nel ginocchio

formano un quadrilatero articolato

Image 461

Image 462

Image 463

154

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.37. Costruzione del

profilo cinematico del con-

dilo

rappresenta la biella del quadrilatero e i due legamenti crociati le manovelle, il profilo del condilo deve essere tale da non interferire con quello del piatto tibiale durante il movimento. In questo caso il movimento sarebbe possibile soltanto grazie alla deformabilità dei legamenti. È facile dimostrare, Fig. 5.38, che per un corretto movimento dell'articolazione il

profilo del condilo femorale deve essere tale che, per ogni angolo di flessione del ginocchio, il punto di contatto tra la superficie del condilo e quella del piatto tibiale deve trovarsi sulla normale al profilo del piatto tibiale mandata dal centro della rotazione istantanea il quale a sua volta si trova nell'intersezione dei due legamenti. Se infatti così non fosse, la velocità del punto di contatto non sarebbe parallela alla superficie del piatto tibiale con interferenza dei due elementi a contatto.

La Fig. 5.38 mostra una simulazione svolta in ambiente Working Model (Simulation Technologies Inc.) sul modello di un arto inferiore. Il modello include i principali muscoli flessori ed estensori dell'anca e del ginocchio, la coppia cinematica condilo femorale-piatto tibiale, i due legamenti crociati. L'attivazione dei muscoli segue il classico paradigma di Hill.

Fig. 5.38. Simulazione del movimento dell'arto inferiore (riprodotto su autorizzazione di Working Model, Simulation Technology Inc.)

 Image 464

5.10 Un sistema articolato con due segmenti

155

5.10 Un sistema articolato con due segmenti

Trattiamo ora un sistema articolato piano costituito da due corpi collegati con un giunto rotoidale. Il primo corpo è collegato al telaio con un secondo giunto rotoidale.

Il sistema è un modello iper-semplificato delle prime due sezioni della gamba. Utilizzeremo per l'analisi le matrici di rototraslazione. La scelta dei sistemi di riferimento fissi e mobili sarà compiuta secondo la procedura di Denavit-Hartenberg. Di seguito la procedura adottata:

-

si scelgano terne destre con l'asse z disposto secondo l'asse di rotazione dei singoli giunti rotoidali;

•

l'asse X sia disposto secondo l'asse dell'elemento, con il verso dal nodo di indice minore a quello di indice maggiore;

•

l'asse Y formerà una terna destra con i primi due.

Indicheremo le lunghezze dei due elementi con a_1 , a_2 rispettivamente, gli angoli di rotazione tra un sistema e quello precedente saranno gli angoli formati dai rispettivi assi X. Quindi θ_1 sarà l'angolo formato da X_1 con X_0 , θ_2 l'angolo tra X_2 e X_1 . Il verso positivo degli angoli sarà antiorario. Richiamando i risultati già ottenuti a proposito delle matrici di rotazione-spostamento, si ottiene facilmente che la posizione del punto 3 rispetto al sistema fisso è data da:

[

]

[[]

c_{θ_1}

$-s_{\theta_1} \ 0 \ 0$

c_{θ_2}

$-s_{\theta_2} \ 0 \ a_1$

| a_2 |

|

||

||

} |

}

0

s0

s0

0

P

|

1

c01

0

0 ||

2

c02

0

0 |

3 = L

=

0

0

1

0]]

0

0

1

0]]

|

{ 0 |

|

]]

0

0

0

1

0

0

0

1

1

[

[[[[

]

c012

- s012 0 a1c01

| a2 | | c012a2 + a1c01 |

|

||

} |

{ |

}

|

{

= | s012

c012

0

a1s01

0

s012a2 + a1s01

L

|

=

.

(5.10.1)

0

0

1

0

J |

|

{ 0 |

|

J |

|

L

0

|

|

J

0

0

0

1

1

1

In cui si è posto $012 = 01 + 02$. Ricordando che $\mathbf{P3}$ rappresenta il vettore posizione del punto 3 rispetto al sistema fisso e ricordando le regole di derivazione dei prodotti, **Fig. 5.39**. Un sistema di due aste articolate

156

5 Elementi di cinematica

la velocità del punto P3 rispetto al sistema fisso si ottiene derivando l'espressione:

[

] [] [

]

c_{012}

$- s_{012} \omega_0 a_1 c_{01}$

$| a_2 | \quad | c_{012} a_2 + a_1 c_{01} |$

|

||

} |

↳ |

}

|

}

0

s0

0

s0

P

|

12

c012

0

a1s01 |

12a2 + a1s01

3 = 0

=

.

2T 2P3 = [

0

0

1

0

J |

|

{ 0 |

|

J |

|

{

0

|

|

J

0

0

0

1

1

1

(5.10.2)

Non è più necessario, nella trattazione delle velocità, ricorrere alle usuali matrici 4×4 , essendo sufficienti per le relazioni tra velocità, matrici d'ordine 3. Si ottiene quindi:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1c01} \dot{v}_1 + a_{2c012} (\dot{v}_1 + \dot{v}_2) \\ a_{1s01} \dot{v}_1 - a_{2s012} (\dot{v}_1 + \dot{v}_2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{1c01} + a_{2c012} & a_{2c012} \\ a_{1s01} - a_{2s012} & -a_{2s012} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_1 + \dot{v}_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{1c01} + a_{2c012} \\ a_{2c012} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{v}_1 +$$

$$\begin{bmatrix} a_{2c012} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{v}_2$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_2 \end{bmatrix} J(0_i) \begin{bmatrix} \dot{v}_2 \end{bmatrix}$$

(5.10.3)

0

0

0

0

0

L'importante risultato espresso dall'ultima relazione mostra che la velocità può essere espressa come prodotto di una matrice dipendente dagli angoli θ , quindi dalla configurazione del sistema, e da un vettore di derivate degli stessi angoli. La matrice prende il nome di **Jacobiano**. Lo Jacobiano varia, ovviamente, con la configurazione. La sua utilità è nel fatto che, assumendo una legge temporale di variazione degli angoli θ , in corrispondenza di una certa configurazione, si ottiene per semplice moltiplicazione la corrispondente velocità v_3 , in corrispondenza del punto 3. Si assuma ad esempio, in conformità a un'osservazione sperimentale del moto di deambulazione lenta, una legge di variazione degli angoli data dalle relazioni: $\theta_1 = \theta_{10} + \dot{\theta}_1 \sin(Ft)$

$\theta_2 = \dot{\theta}_2 \sin(2Ft - \dots)$.

(5.10.4)

Le leggi assunte si riferiscono al moto di avanzamento della gamba nella seguente successione Fig. 5.40:

-

slancio iniziale del ginocchio e della coscia che ruota nel senso positivo delle rotazioni, quello antiorario, partendo però da un angolo di partenza negativo;

-

la tibia ruota nel senso negativo delle rotazioni, rispetto al femore. Questo è dovuto al fatto che l'azione del muscolo flessore del ginocchio, rappresentato in Fig. 5.40 come una molla tratteggiata, fa ruotare i due elementi che collega in senso opposto;

•

continua la rotazione del femore mentre il ginocchio è esteso, generando una rotazione positiva della tibia;

•

femore e tibia terminano il ciclo di movimento, allineati.

Quello analizzato è solo un quarto del ciclo completo di deambulazione. A noi servirà semplicemente, per analizzare la legge di variazione della velocità della cavaglia, il

 Image 465

5.10 Un sistema articolato con due segmenti

157

Fig. 5.40. Un modello

semplice della gamba

punto indicato come nodo 3 nella trattazione precedente. Riprendendo quindi la legge di variazione degli angoli θ e derivando si ha:

•

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)$$

•

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_2 \cos(2\theta_2 - \theta_1) .$$

(5.10.5)

Utilizzando ancora lo Jacobiano, ricavato in precedenza, si ha:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta_1 - a_2 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - a_2 \sin \theta_1 \dot{\theta}_2 \\ a_1 \sin \theta_1 + a_2 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + a_2 \cos \theta_1 \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} = F_1 \cos(\theta_1) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + F_2 \sin(\theta_1) \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(5.10.6)

0

0

0

0

Per giungere a una valutazione numerica della legge di velocità della caviglia si supponga che il movimento corrispondente alla parte di ciclo analizzata sia compiuto in un secondo. La pulsazione F è quindi eguale a $6,28 \text{ rad/s}$. Si assumano inoltre i dati seguenti:

$$\theta_{10} = -90^\circ; \theta_{20} = 0; \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 30^\circ; a_1 = a_2 = 0,45 \text{ m}.$$

I valori di v_3 in funzione del tempo sono stati calcolati usando l'ambiente Matlab.

L'andamento della velocità della caviglia è riportato nella Fig. 5.41. v_{x3} rappresenta la componente orizzontale della velocità, v_{y3} la componente verticale. Quest'ultima inizia con valori discreti, a causa del movimento di trascinamento della tibia da parte del femore, scende poi a zero per il moto retrogrado del secondo elemento, per ri-guadagnare valori positivi nell'ultima parte del ciclo. Si tenga presente che il tempo di 1 s, che rappresenta l'estensione delle ascisse, corrisponde a un intero ciclo d'oscillazione per la tibia, a un quarto di ciclo per il femore. L'analisi cinematica qui svolta parte dalla conoscenza della legge d'oscillazione dei due elementi del sistema, cui segue il calcolo dello Jacobiano, e infine quello della velocità del punto 3. Un altro procedimento di calcolo per sistemi articolati piani è applicabile quando esiste almeno un punto in cui è noto il valore della velocità e dell'accelerazione, ad esempio un punto fisso. Mostreremo questo procedimento di calcolo applicato alla determinazione della velocità e dell'accelerazione in qualunque punto di un sistema articolato piano, quando sono date la configurazione del sistema e le velocità angolari nei suoi

 Image 466

158

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.41. Andamento della velocità della caviglia col tempo durante il cammino: v_{x3} componente orizzontale, v_{y3} componente verticale

giunti. Si consideri allora lo stesso sistema articolato considerato in precedenza, e si applichi il teorema di Rivals, partendo dal primo elemento, nel quale è presente un punto fisso, e passando in seguito al secondo elemento, ottenendo: $\mathbf{v}_1 = 0$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \dot{\theta}_1 \times \mathbf{P}_2$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \times (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2).$$

(5.10.7)

Sostituendo i vettori espressi secondo le componenti, si ha:

[]

[] [

] [

]

{ v_{2x} }

{ 0 } { a_{1c01} } { } - $a_{1s01} \dot{\theta}_1$ }

$$[v_{2y}] = 0 + [0] \times [a_{1s01}] = [a_{1c01} \dot{\theta}_1]$$

0

.

01

0

0

[[[

] [

] [

]

{ v3x } { - a1s01 '01 } { }

0

{ { a2c(01 + 02) }

[v3y =

+

×

] [a1c01 '01] [

0

] [a2s(01 + 02)] =

0

0

('01 + '02)

0

[

]

{ - a1s01 · 01 - a2s(01 + 02)(· 01 + · 02) }

= [a1c01·01+a2c(01+02)(·01+ ·02)] .

(5.10.8)

0

Un semplice esame permetterà di verificare che l'espressione della velocità del punto 3 è identica a quella ottenuta per altra via. Si ricordi che $012 = 01 + 02$. La procedura illustrata è applicabile, anche se non si è alla presenza di un punto fisso, a condizione che nel punto da cui la procedura ha inizio la velocità sia, in ogni caso, nota.

 Image 467

5.11 Analisi della deambulazione

159

5.11 Analisi della deambulazione

Presentiamo alcuni elementi fondamentali per l'analisi della deambulazione, cercando di capire la natura dei problemi connessi e gli strumenti più adatti per risolverli.

Cominciamo dalla Fig. 5.42 che ne descrive le fasi. La fase a) inizia con il carica-mento della gamba destra, ottenuto con lo spostamento del tronco in avanti e con la forza orizzontale propulsiva sul piede sinistro. L'estensione del ginocchio è ottenuta attraverso l'azione del quadricipite femorale, evidenziato in figura. Nella fase intermedia b) avviene una rotazione di tutto il corpo intorno alla gamba destra te-sa, mentre la sinistra s'inflexe e il piede sinistro si stacca da terra. In questa fase il corpo è soggetto a una

caduta in avanti, simile a quella di un bastone, inizialmente tenuto in equilibrio verticale e lasciato poi ruotare intorno al suo punto di appoggio sul terreno. È anche possibile osservare che il baricentro del corpo subisce un innalzamento nella fase intermedia, e un abbassamento in quelle iniziale e finale.

Quest'abbassamento è contrastato nelle fasi a e c dal sollevamento del piede intorno al suo punto avanzato di rotazione. Un calcolo dell'abbassamento del baricentro tra una posizione con gambe allargate a compasso e piedi completamente poggiati e la posizione diritta con gambe unite in posizione verticale, porterebbe a valori dell'abbassamento intorno a 12 cm, se non intervenissero meccanismi correttivi, come quelli prodotti dalla rotazione della caviglia, che riducono a circa 2,4 cm il valore precedente. Questo dato permette di impostare un calcolo di massima dell'energia spesa nella deambulazione, ricordando che il lavoro è dato dal prodotto scalare della forza per lo spostamento del suo punto di applicazione. In questo caso la forza capace di produrre lavoro è soltanto la forza peso, oltre ai momenti che agiscono in corrispondenza dei giunti. Ricordiamo che, anche se questi momenti sono presenti come coppie equilibrate sul giunto, essi compiono lavoro a causa della rotazione relativa dei due segmenti che insistono su di esso. Calcolare questo lavoro richiede l'impiego di algoritmi di dinamica inversa, nei quali, partendo dalla conoscenza delle reazioni sul terreno e delle leggi di movimento, si calcolano i momenti dovuti alle forze muscolari in corrispondenza dei giunti. Ci limiteremo pertanto a considerare il lavoro perduto per il ciclo d'innalzamento-abbassamento del baricentro, in corrispondenza di ogni passo. Partiamo dall'ipotesi che l'energia potenziale acquisita durante la fase di innalzamento del baricentro non venga restituita durante la **Fig. 5.42. Fasi del**

cammino per la gamba

d'appoggio: a) carico;

b) supporto intermedio;

c) supporte finale

a) b) c)

Image 468

Image 469

160

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.43. Spostamento

del baricentro nel piano

frontale

fase successiva di abbassamento. Questa ipotesi è giustificata dalla presenza di fenomeni dissipativi che agiscono nella fase di contatto del piede avanzato sul terreno.

Oltre che nel piano verticale il baricentro si sposta nel piano orizzontale, perché passando dal sostegno sulle due gambe a quello su una gamba sola, il corpo si sposta lateralmente, in modo tale da portare il baricentro sulla verticale del piede di appoggio, vedi Fig. 5.43. Se in prima approssimazione consideriamo l'abbassamento pari a 2 cm, il lavoro compiuto da un corpo di massa pari a 75 kg è, per ogni passo, eguale a $75 \cdot 9,81 \cdot 0,02 = 14,7$ J. Assumendo che in un'ora, con andatura di passeggio, si compiano 5000 passi di ampiezza 0,75 m, ne consegue che il lavoro speso in un'ora è pari a $14,7 \cdot 5000 = 35000$ Ws = 9,722 Wh. Si tratta di un'energia molto ridotta, corrispondente a una potenza continuativa di 10 W. Per tener conto anche del sollevamento del baricentro della gamba, possiamo impostare un semplice calcolo, utilizzando i dati forniti nel capitolo sulle forze (tabella sulle dimensioni degli arti superiori e inferiori). Con riferimento alla Fig. 5.45, otteniamo i seguenti dati di partenza: $h_3 = 0,755$ m $h_2 = 0,33$ m $h_1 = 0,05$ m. Assumiamo inoltre $H_1 = 45^\circ$, $H_2 = 90^\circ$.

Per il peso delle varie sezioni assumiamo, sempre con riferimento ai dati precedenti, **Fig. 5.44**. Escursione del baricentro

 Image 470

5.11 Analisi della deambulazione

161

Fig. 5.45. Energia persa nel sollevamento della gamba

coscia 65 N, gamba 30 N, piede 10 N. Il lavoro compiuto per il sollevamento dei baricentri delle varie sezioni è quindi:

$$!h_3 = l_3(1 - \cos H_1)$$

$$!h_2 = l_3(1 - \cos H_1) + l_2(1 - \cos(H_2 - H_1))$$

$$!h_1 = l_3(1 - \cos H_1) + l_1(1 - \cos(H_2 - H_1)) .$$

I semplici calcoli numerici portano a:

$$!h_3 = 0,06 \text{ m}$$

$$!h_2 = 0,107 \text{ m}$$

$$!h_1 = 0,20 \text{ m}$$

$$!L = -!U = -(m_3g * !h_3 + m_2g!h_2 + m_1g!h_1) =$$

$$= -(65 * 0,06 + 30 * 0,107 + 10 * 0,20) = -9,11 \text{ J} .$$

Poiché si ha un sollevamento a ogni passo, il lavoro speso per 5000 passi compiuti in un'ora risulta $L = 5000 * 9,11 / 3600 = 12,65 \text{ Wh}$.

Sommando questo lavoro a quello, già calcolato per il sollevamento del baricentro dell'intero corpo si ottiene $L_{12} = L_1 + L_2 = 12,65 + 9,72 = 22,37 \text{ Wh}$. Nel calcolo precedente abbiamo supposto che, come è legittimo

considerare, il lavoro di sollevamento del baricentro del corpo e delle gambe non venga in alcun modo recuperato. Pur dovendo considerare del tutto qualitativo il calcolo fatto, salta agli occhi la ridotta entità del lavoro meccanico compiuto durante la deambulazione. Tuttavia occorre considerare che il lavoro meccanico calcolato non tiene conto dell'energia perduta per attrito nella rotazione dei giunti (ginocchio, caviglia, spalla, gomito), energia il cui calcolo, anche di prima approssimazione, si presenta assai arduo. Inoltre, il rendimento energetico complessivo del sistema di locomozione dell'uomo è assai basso, l'azione muscolare è da considerarsi un processo a basso rendimento. Studi compiuti a questo riguardo, hanno mostrato che il rendimento complessivo, cioè il rapporto tra lavoro meccanico

162

5 Elementi di cinematica

svolto ed energia consumata nei processi metabolici connessi al lavoro muscolare, ha valori intorno al 20–30%.

Sul lato sperimentale la valutazione dell'energia spesa per la deambulazione ha formato oggetto di molta attenzione tra i ricercatori. L'approccio seguito è stato in genere quello di misurare la quantità di CO₂ prodotta durante l'attività a regime, in eccesso rispetto a quella prodotta a riposo. Dalla quantità di CO₂ espirata, si passa al consumo d'ossigeno, che può essere messo in relazione con l'energia metabolica consumata. In termini approssimati si può ritenere che, per una tipica dieta composta di grassi, carboidrati e proteine, a un litro di ossigeno consumato corrispondano 4,82 Kcal. Studi sperimentali, condotti con la spirometria su diversi tipi di marcia e su soggetti diversi, hanno verificato che un adulto in marcia lenta consuma 15 ml d'ossigeno per kg di peso corporeo al minuto. Ritornando al nostro marciatore, di massa pari a 75 kg, otteniamo che il suo consumo di ossigeno, per un'ora di marcia, sarebbe pari a:

$$\text{Vol O}_2 = 0,015 * 75 * 60 = 67,5 \text{ dm}^3$$

corrispondente a

4,82 * 67,5 = 325,35 Kcal = 0,38 kWh = 380 Wh .

(5.11.1)

Nella formula precedente 4,82 rappresenta la quantità di calore totale ottenuta dalla combustione di un dm³ di ossigeno. Il valore dell'energia metabolica richiesta per la marcia è quindi assai più alto del lavoro meccanico compiuto, pur prendendo in considerazione tutti i movimenti che hanno luogo negli organi del nostro corpo, movimenti delle braccia, tronco etc. In conclusione, un modello puramente "macchini-stico" dell'attività muscolare non permette di prevedere con buona approssimazione l'energia consumata. Si tenga presente ad esempio che, se si sostiene un peso con un braccio immobile, non si compie alcun lavoro meccanico, mentre i muscoli deputati all'operazione richiedono energia metabolica per restare in contrazione. L'esempio e i dati riportati mostrano che non esiste ancora un modello affidabile che descriva accuratamente, in termini di forze e spesa energetica, il modo di funzionare dei muscoli.

Il ciclo del cammino

Il ciclo del cammino è definito come la successione di movimenti che parte dall'appoggio del tallone di un piede, al successivo appoggio sullo stesso piede. Il ciclo si divide nelle due fasi di appoggio e trasferimento, per la stessa gamba. La durata delle varie fasi, indicata in percentuale nella descrizione che segue, si riferisce all'intero ciclo (stride).

Si distinguono otto fasi:

1. Contatto iniziale (*Initial Contact*) (0–2% del ciclo del passo): Comprende l'intervallo temporale in cui il piede, normalmente il tallone, tocca il pavimento.
2. Carico iniziale (*Loading Response*) (0–10%): Periodo di decelerazione durante il quale viene assorbito l'urto dovuto al contatto con il suolo, corrisponde alla fase di primo doppio appoggio.

 Image 471

5.11 Analisi della deambulazione

163

3. Appoggio singolo (*Mid Stance*) (10–30%): inizia quando il piede controlaterale è sollevato, e termina quando il peso è sopportato dalle teste metatarsali e dalle dita del piede di interesse. In questa fase l'arto supporta tutto il peso del corpo.

4. Appoggio terminale (*Terminal Stance*) (30–50%): questa fase conclude quella di appoggio singolo. Termina quando l'arto controlaterale tocca il suolo.

5. Inizio trasferimento (*Pre Swing*) (50–60%): è l'ultimo periodo della fase di appoggio doppio. Incomincia con il contatto iniziale del piede opposto e termina con il distacco delle dita dell'arto in appoggio (toe-off).

6. Trasferimento iniziale (*Initial Swing*) (60–73%): è il primo periodo della fase di *swing*. Il piede è sollevato dal terreno, l'arto si muove in avanti. Il periodo termina quando l'arto oscillante è parallelo al piede in appoggio.

7. Trasferimento intermedio (*Mid Swing*) (73–87%): comprende l'avanzamento dell'arto fino al punto in cui è davanti all'altro.

8. Trasferimento finale o *Terminal Swing* (87–100%): l'arto decelera per un corretto pre-posizionamento, che lo prepara alla successiva fase di appoggio. Termina quando il tallone in esame tocca il suolo.

Il modello di analisi del movimento più semplice utilizzato per il cammino assume che il movimento degli arti inferiori sia il risultato del movimento di sette segmenti (pelvi, cosce, gambe e piedi) collegati tra loro da sei articolazioni (anca, ginocchio, caviglia).

Descriveremo il ciclo del passo con riferimento a una sola gamba, inizialmente appoggiata e poi trasferita in avanti. La fase di appoggio corrisponde al contatto della gamba di riferimento col terreno, quella di trasferimento, allo spostamento della gamba in avanti sino al momento del contatto successivo. La fase di appoggio ha una durata pari a circa il 60%

dell'intero ciclo, quella di trasferimento del 40%. La durata della fase di appoggio si riduce al 40% nella corsa, in cui compare una terza fase, quella di volo, nella quale nessuno dei piedi è a contatto col terreno.

Appoggio 1. Doppio contatto, Fasi 1, 2

Il ciclo inizia con un periodo di appoggio doppio, di durata pari al 10% di quella totale del ciclo, durante il quale ambedue i piedi sono a contatto col terreno. Il tallone del piede di riferimento, in grigio, tocca il suolo mentre l'altro piede è ancora a contatto.

Fig. 5.46. Fase 1: doppio contatto

Image 472

Image 473

164

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.47. Fase 2: carico iniziale e intermedio

Si tratta di una vera e propria collisione perché il piede è dotato di una componente di velocità diretta verso il basso. Ad ammortizzare gli effetti dell'urto concorre il meccanismo di movimento del piede. La fase termina quando il resto del piede viene a contatto col terreno. Durante questa fase il piede subisce una pronazione dovuta all'articolazione sub-talare, necessaria per portare il contatto sulla parte mediale. In questa fase il piede funziona come un ammortizzatore. La tibia ruota internamente seguendo il movimento del piede.

Appoggio 2. Carico iniziale, Fasi 3, 4

La reazione del terreno sul piede di riferimento aumenta rapidamente, sia a causa di effetti dinamici che per il trasferimento di carico sul piede anteriore, quello posteriore sta infatti per terminare la sua fase di contatto.

La reazione del terreno è inclinata nel senso antero-posteriore. Grazie allo spostamento in avanti del tronco la reazione vincolare acquista un momento rispetto al baricentro che fa ruotare il corpo in senso orario, con un movimento, appena accennato, di caduta in avanti. La gamba di riferimento ruota intorno all'articolazione della caviglia. Il piede si prepara ad assumere la funzione di leva per dare inizio alla fase di propulsione.

Appoggio 3. Propulsione, Fase 5

Il piede di riferimento compie una flessione palmare sotto l'azione del gastrocnemio e del soleo. Il tronco ruota in senso orario e si sposta in avanti. Per limitare il sollevamento del baricentro durante la rotazione del piede il ginocchio s'infilette.

Fig. 5.48. Fase 3: propulsione

 Image 474

5.11 Analisi della deambulazione

165

Fig. 5.49. Fasi 4–5: oscillazione e trasferimento

La forza generata è diretta in senso postero-anteriore. Perché questa fase sia svolta correttamente, l'articolazione sub-talare deve essere supinata. Se esistesse una pronazione anormale dell'articolazione sub-talare, questa andrebbe a prolungare la fase di propulsione e contatto e il trasferimento del carico sull'avampiede non sarebbe normale.

Oscillazione 4. Fase 6

La fase di trasferimento inizia subito dopo il sollevamento del piede. Il ginocchio si flette e il piede effettua una flessione dorsale. L'articolazione dell'anca viene inflessa per portare la gamba in avanti mentre il piede si muove parallelamente al terreno.

Oscillazione 5. Fasi 7, 8

L'ultima parte della fase di oscillazione corrisponde a una distensione del ginocchio.

Il piede si dispone per il contatto sul tallone. I muscoli della gamba, in particolare il gastrocnemio e il quadricipite si attivano per assorbire le azioni dinamiche dovute al contatto del tallone col terreno. Dopo di questo inizia un nuovo ciclo. Nel cammino normale il piede entra in contatto col tallone. Di solito il contatto avviene nella zona postero-laterale con conseguente usura dell'area interessata.

Il parametro che influisce in modo importante sull'area di contatto nel tallone è la posizione del piano trasverso del piede al momento del contatto. L'usura della zona mediale indica la presenza di probabili anomalie nella rotazione del segmento superiore. Nel cammino a velocità elevata può mancare il contatto col tallone. In questo caso il primo contatto può avvenire a metà piede e successivamente una rotazione del piede porta a contatto il tallone. In altri casi il contatto col tallone può mancare del tutto. Questo accade per esempio nello scatto. Dal punto di vista funzionale il piede ha tre importanti compiti: assorbimento dei carichi dinamici, controllo del sostegno e della stabilità del corpo, e propulsione. Ci limiteremo a pochi cenni sull'azione complessa svolta dal piede durante il cammino, lasciando a testi specialistici un'analisi profonda dell'argomento. Le articolazioni principali che influiscono sulla biomeccanica del cammino sono quelle tibio-tarsica, sub-talare, medio-tarsica e metatarso-falangea, indicate nella Fig. 5.50, con 1, 2, 3, con i profili delle superfici articolari.

 Image 475

 Image 476

166

5 Elementi di cinematica

Fig. 5.50. Le fasi del cammino in sintesi

Assorbimento dei carichi dinamici

I principali meccanismi di assorbimento sono collegati alla struttura a volta del sot-topiede, schematicamente rappresentata nella figura. La volta si comporta come una struttura ad arco e, deformandosi quando il carico è applicato, fornisce un meccanismo di assorbimento dei carichi dinamici molto efficace. Si pensi soprattutto alla corsa, in cui questi carichi sono di rilevante entità, pari anche a 7–8 volte il peso corporeo. In Fig. 5.51, sono mostrati i carichi agenti nella fase di primo contatto del piede col terreno: la tibia applica all'astragalo un carico rivolto in avanti e verso il basso, mentre il carico applicato dal suolo al tallone è corrispondentemente rivolto verso l'alto, in senso anteroposteriore. Il momento di rotazione oraria che si genera, produce una flessione plantare del piede che tende ad appoggiarsi completamente sul terreno. Questo movimento è controllato dalla tensione del muscolo tibiale anteriore (forza tratteggiata). La pronazione porta anche il piede a una condizione d'irrigidimento, necessaria per la successiva fase di propulsione. Se osserviamo il piede (nel caso presente si tratta del piede sinistro) dal lato posteriore Fig. 5.53, vediamo che le linee d'azione delle due forze verticali trasmesse rispettivamente in corrispondenza dell'articolazione della caviglia e al contatto tra suolo e calcagno sono diverse.

Fig. 5.51. Le articolazioni principali del piede.

Schema delle forze agenti sul piede

 Image 477

 Image 478

5.11 Analisi della deambulazione

167

Fig. 5.52. Coppia di rotazione nel piano orizzontale

Fig. 5.53. Rotazione del piede in corrispondenza dell'articolazione subtalare

Nasce quindi una coppia C1 di momento orario, che tenderebbe a produrre una supinazione del piede se questa non fosse impedita dall'articolazione tibioastragalica. Viene generata così una rotazione nell'articolazione talo-calcaneare con una rotazione interna della tibia rispetto al calcagno. La pianta va così ad appoggiarsi sul suolo e il contatto si sposta dal calcagno alla pianta stessa. Per capire come il piede tenda nella prima fase di appoggio a compiere un movimento di pronazione-eversione è utile osservare il piede dall'alto, con le componenti di forza relative nel piano di appoggio. I momenti che tendono a portare l'avampiede in pronazione ed eversione (la punta del piede ruota lateralmente) e l'astragalo, solidale alla tibia e al perone, in rotazione interna, sono indicati in Fig. 5.52. Nella fase di carico il piede poggia sul terreno nella zona plantare e su un'ampia area del calcagno. Nel piede normale queste due zone sono raccordate da un'area di collegamento lungo la fascia laterale. Quest'area manca nel piede molto arcuato, lasciando le due zone separate.

Nel piede piatto l'area di contatto si estende a tutta la pianta, per il cedimento dell'arco plantare. Si deve osservare che, comunque, il piede si appiattisce sotto carico a causa della flessione dell'articolazione medio tarsica. Si tratta di una deformazione modesta perché i carichi sono ben supportati dalla struttura ad arco di sostegno. Nella fase di propulsione, a causa della potente azione del soleo e del gastrocnemio il calcagno si solleva e provoca la flessione dell'articolazione metatarso-falangea. Nella Fig. 5.51, sono rappresentate in modo molto semplificato le tre forze principali agenti in questa fase. La prima è dovuta ai muscoli soleo e gastrocnemio e ha la funzione di sollevare il retropiede dal terreno, lasciando il contatto soltanto in corrispondenza delle falangi e dell'articolazione metatarso-falangea, la seconda è la reazione del terreno diretta verso l'alto e inclinata in senso anteroposteriore, la terza è diretta se-

 Image 479

 Image 480

Fig. 5.54. Evoluzione della zona

di contatto nel piede

Fig. 5.55. Pronazione e supinazione del piede

condo l'asse della tibia e si scarica sull'astragalo. In questa visione semplificata delle principali forze agenti, le tre azioni descritte, per farsi equilibrio, devono passare per uno stesso punto. Misurando l'azione tra suolo e piede, si possono ricavare le altre due azioni muscolari incognite. Nella biomeccanica sperimentale si misurano, grazie a piattaforme baropodometriche, le pressioni di contatto tra pianta del piede e terreno.

È facile ricavare da queste misure il valore della risultante delle forze di reazione. La Fig. 5.56 riporta alcune immagini ottenute per elaborazione dei dati baropodometrici.

In questa sede si può soltanto accennare al fatto che le diverse patologie del piede e della caviglia portano a pattern baropodometrici alterati e facilmente riconoscibili. Lasciamo ai trattati specialistici l'analisi dell'argomento. Osserviamo comunque che nel caso rappresentato mancano le informazioni riguardanti le azioni tangenziali scambiate per attrito tra piede e terreno. Esistono comunque piattaforme di forza atte anche alla misura delle azioni tangenziali. L'esame baropodometrico è associato in genere alla ripresa televisiva del piede e della gamba durante la camminata per valutare la postura e il corretto movimento dei vari segmenti. La Fig. 5.54 mostra come il contatto parta da una zona laterale del calcagno, per proseguire lungo l'istmo che separa il calcagno dalla pianta, e terminare sull'articolazione metatarso-falangea e quindi sull'alluce che rappresenta l'ultima zona di contatto, prima del distacco. Si è già accennato al movimento complesso del piede durante questa fase, costituito essenzialmente da un movimento di pronazione-eversione che porta il contatto dalla fascia laterale a quella mediale. In prossimità dell'ultima fase del contatto ha inizio un movimento di supinazione, che porterà il piede in posizione supinata, nella quale resterà sino al contatto successivo.

 Image 481

5.11 Analisi della deambulazione

169

Fig. 5.56. Rilievo sperimentale delle pressioni durante il cammino

Modello a segmenti del corpo umano

Lo studio biomeccanico del movimento degli arti inferiori e superiori trae beneficio dall'assimilare gli arti a un sistema di corpi rigidi, articolati per mezzo di giunti rotoidali. La modellazione dell'arto richiede una serie d'ipotesi semplificative che rendono il problema facilmente trattabile, pur con risultati di notevole rilevanza applicativa.

Alcune di queste ipotesi sono:

-

corpi indeformabili;

-

giunti corrispondenti ai modelli ideali presentati.

In molti casi una semplificazione ancora più elevata si ha considerando il moto dell'arto piano, cioè trascurando i gradi di libertà corrispondenti all'esistenza di giunti sferici, piuttosto che rotoidali piani. In conformità a queste ipotesi di prima approssimazione, si può impostare un'analisi cinematica dell'arto, seguendo i principi esposti in precedenza.

Nel modello in Fig. 5.57 si è costruito un sistema articolato che rappresenta il tronco come un unico elemento rigido e i due arti inferiori come sistemi articolati con tre segmenti, il femore, la tibia, il piede. Il problema è di calcolare la posizione di un qualunque elemento (ad esempio la posizione del baricentro del tronco oppure quella della caviglia avanzata, in funzione degli angoli assunti dai vari segmenti). È

pratica usuale, normalmente vantaggiosa, quella di riferirsi agli angoli che un generico segmento forma con quello contiguo (ad esempio l'angolo di

*

*

*

.

1

T12 T23 T34 |

|

{0 |

|

J

1

Con i sistemi di riferimento solidali ai vari segmenti si potrà quindi trovare la posizione di ogni punto del corpo (anche, se si desidera, di un punto all'interno di un segmento particolare).

Applicazione. Si considerino i seguenti dati:

$a = \text{lunghezza femore} = \text{lunghezza tibia} = 0,45 \text{ m}$

$01 = 0 \text{ } 0d1, x = 1, 0 = 0d1, y = 0$

0

1

$2 = -110^\circ$

$1d2, x = -a * \cos 102$

$$d_2, y = -a * \sin 102$$

$$03 = 0 \ 2d_3, x = -0,45 \ 2d_3, y = 0$$

$$04 = 0 \ 3d_4, x = -0,4 \ 3d_4, y = 0$$

0

$$4T = 0$$

$$1T * 1$$

$$2T * 2$$

$$3T * 3$$

$$4T .$$

Dopo il calcolo delle singole matrici di trasformazione e del prodotto che porta alla

5.11 Analisi della deambulazione

171

matrice $0T$ otteniamo:

4

[

]

-0,34

0,94 0 1,44

|

$$\begin{array}{l}
 | \\
 0 \\
 | -0,94 \quad -0,34 \quad 0 \quad 1,22 | \\
 4\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \\
 0 \\
 0 \\
 1 \\
 0 \end{bmatrix} . \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 1
 \end{array}$$

L'espressione precedente mostra il risultato del prodotto delle matrici di rototraslazione dei vari sistemi di assi. La quarta colonna rappresenta la posizione dell'origine del sistema 4 rispetto al sistema fisso X0 , Y0. Con un procedimento analogo si potrebbe trovare la posizione di qualunque punto del corpo rispetto a qualunque riferimento.

Del tutto analoga è la procedura per il calcolo della posizione della caviglia del piede anteriore, origine del sistema 7 rispetto al sistema 4 con origine nel tronco o rispetto al sistema fisso.

Determinazione di posizioni e traiettorie

La posizione assoluta di qualunque punto appartenente a un segmento corporeo può essere determinata facilmente attraverso la matrice di trasformazione che lega il sistema di assi solidale a quel segmento al

sistema di assi di base. Se ad esempio si volesse conoscere la posizione del giunto corrispondente al ginocchio anteriore rispetto al sistema di base, si dovrebbe ricavare la matrice ${}^0\mathbf{T}$ che riporterà nella quarta colonna 6

le componenti dello spostamento richiesto. Se invece si desiderasse trovare una posizione relativa, ad esempio quella della caviglia avanzata rispetto a quella arretrata la matrice da calcolare sarebbe la ${}^1\mathbf{T}$. Per determinare la traiettoria di un punto rilevante 7

del sistema coincidente con l'origine di uno dei sistemi mobili, si deve considerare che la matrice di trasformazione tra due sistemi può essere ricavata esplicitamente in funzione di valori definiti degli angoli che definiscono la configurazione del sistema oppure lasciando non in forma simbolica le espressioni che contengono questi angoli.

In questo caso si potrà calcolare rapidamente la posizione del punto sostituendo in quelle espressioni i valori degli angoli. Si voglia ad esempio calcolare la traiettoria dell'origine del sistema 4 rispetto al riferimento assoluto. Invece di scrivere la matrice ${}^0\mathbf{T}$ esplicitamente com'è stato fatto in precedenza, si può con semplici passaggi 4

arrivare alla sua espressione simbolica:

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

c_01234

$-s_01234 \quad 0 \quad 0d1x + ac(012) + ac(0123) + 3d4xc(01234)$

$$\begin{bmatrix} | \\ | \\ 0 \end{bmatrix}$$

0

$$\begin{bmatrix} | \\ s_01234 \end{bmatrix}$$

c01234

0

0d1y + as(012) + as(0123) + as(01234) |

4T = [

0

0

1

0

].

0

0

0

1

A questo punto è sufficiente dare un campo di variazione per ogni angolo e dividere questi campi in un numero discreto di valori. Si avranno così a disposizione diverse terne di angoli 01, 02, 03 a ciascuna delle quali corrisponde un punto della traiettoria dell'origine del sistema 4. Dal punto di vista computazionale non è la stessa cosa valutare ogni matrice di trasformazione separatamente e fare la moltiplicazione per estrarne dalla matrice prodotto la quarta colonna. Se si svolge la moltiplicazione in modo simbolico prima e si calcolano in seguito i valori delle componenti x e y della quarta colonna, si risparmierà un notevole numero di operazioni.

172

5 Elementi di cinematica

5.12 Analisi cinematica

Vogliamo determinare velocità e accelerazioni in qualunque punto del sistema articolato, quando sono date le velocità angolari dei giunti. Con riferimento al modello precedente, si osservi che l'analisi può cominciare dall'origine del sistema X_1, Y_1 , perché questo punto corrisponde alla cerniera dell'arto. La velocità del punto O_2 , origine del sistema di riferimento 2 è data dalla relazione:

$$\mathbf{v}_{O_2} = \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_3$$

2

$$\mathbf{v}_{O_2} = \dot{\theta}_2 \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2 .$$

(5.12.1)

Se si assume che durante il movimento di rotazione dell'arto arretrato, la gamba sia tesa, cioè sia $\theta_{23} = 0$, si ottiene anche

$\theta_{23} = 0$, si ottiene anche

$$\mathbf{v}_{O_3} = \mathbf{v}_{O_2} + \dot{\theta}_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_3$$

$$= \dot{\theta}_2 \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2 + \dot{\theta}_3 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_3$$

3

$\mathbf{O}_2 \mathbf{O}_3$

$$\mathbf{v}_{O_3} = \dot{\theta}_2 \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_3 .$$

(5.12.2)

Per la determinazione della velocità del punto O_4 , origine del sistema di riferimento, occorre stabilire se il tronco ruota rispetto al femore. Se così fosse, la velocità del punto O_4 , origine del sistema di riferimento 4, sarebbe:

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v} + (\dot{\theta} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}_{O3})$$

(5.12.3)

Un discorso analogo vale per le accelerazioni e non verrà quindi qui ripetuto in dettaglio. Si rimanda a quanto detto in generale per la determinazione delle accelerazioni.

Cinematica diretta e inversa. Obiettivi della biomeccanica

La cinematica diretta, come il caso trattato prima ha mostrato, si propone di valutare le traiettorie, velocità e accelerazioni di una serie di punti appartenenti al sistema in esame, e la valutazione dei parametri del movimento come escursioni angolari dei giunti, variazioni di lunghezza dei muscoli e ogni altro elemento utile per formulare un'analisi del funzionamento del sistema in esame.

La complessità del modello dipende dagli obiettivi dell'analisi. Quando ad esempio s'intende trattare in forma chiara e lineare i problemi della cinematica, un modello piano, costituito cioè da segmenti mobili in un piano collegati con giunti rotoidali, è in genere sufficiente per gli scopi d'illustrazione dei principi di base. Per la trattazione di problemi applicativi più complessi, si deve ricorrere a modelli tridimensionali, di maggiore sofisticazione. In questo caso la scelta può essere quella di adottare uno dei tanti sistemi di modellazione biomeccanica presenti sul mercato, come il pacchetto OpenSource, OpenSim di cui la Fig. 5.59 presenta un'esemplificazione, oppure di costruire, nel caso l'analisi faccia parte di un'attività di ricerca, un modello ad-hoc con le caratteristiche e la

complessità adatte all'analisi da svolgere. Nell'ambiente di simulazione citato sono possibili analisi di vario tipo ed estensione. È possibile dopo avere caricato un modello dell'intero corpo, o dei segmenti che interessa studiare, creare una legge di movimento derivante da dati sperimentali o analitici. Durante l'esecuzione è possibile tracciare con opportuni diagrammi tutti i parametri del movimento, le azioni interne ed esterne. È frequente il caso che l'analisi del movimento

 Image 483

 Image 484

5.12 Analisi cinematica

173

a)

b)

Fig. 5.58. a) Analisi dell'influenza del peso dello zaino sulla postura; b) analisi baropodometrica mediante solette strumentate (Laboratorio Analisi della Postura, DIMECA, Università di Cagliari)

Fig. 5.59. Analisi del movimento (riprodotto su autorizzazione di OpenSim, SIMTK)

sia rivolta al monitoraggio dei risultati di una cura o di un'attività riabilitativa. In questi casi si ricorre all'analisi cinematica sperimentale mediante il rilievo, durante il moto, delle traiettorie di punti particolari del corpo, in cui vengono apposti marker riflettenti, ripresi da telecamere affacciate alla scena del movimento. Non entriamo in merito all'architettura dei sistemi e dei sensori impiegati per queste analisi sperimentali, lasciando questo compito alla letteratura specializzata. In questa sede cercheremo di trattare brevemente le tecniche di analisi impiegate.

 Image 485

 Image 486

 Image 487

 Image 488

174

5 Elementi di cinematica

1) Si analizzano le immagini delle telecamere corrispondenti a istanti successivi, con intervalli molto ravvicinati, dell'ordine di 0.05 s. Attraverso la ricostruzione stereoscopica s'individuano le immagini di una terna di marker solidali a un segmento corporeo e si calcolano con gli algoritmi esposti in precedenza le posizioni di questi rispetto al sistema di riferimento globale del laboratorio, ad esempio GP_i , M , GP

, GP

essendo G l'indice del sistema globale, M

1

i , M_2

i , M_3

1, M_2 , M_3 i nomi

dei marker, i l'indice che designa il segmento in esame.

2) Si deriva dalle informazioni precedenti il (Local Marker Reference System), riferito al sistema globale attraverso la matrice che chiameremo GT_i , LMR.

3) Si ottiene la posizione e giacitura del sistema locale (LRS) attraverso una matrice di trasformazione LMR

LRS Ticalcolata in precedenza per mezzo dei dati antropometrici. Si ha quindi:

G

LMR

LRST_i =

G

LMRT_i LRS T_i.

4) Si calcola la matrice che lega il sistema locale baricentrico (LCRS) al sistema locale attraverso una matrice di trasformazione calcolata in precedenza su dati antropometrici. Ricordiamo che il sistema locale baricentrico ha gli assi ordinatamente paralleli al sistema (LRS) ed è traslato di una quantità nota o calcolabile rispetto a questo.

5) Il processo 1-4 viene ripetuto per il segmento i+1 contiguo al segmento i.

6) Si determina la matrice che lega i sistemi di riferimento locali connessi ai segmenti i e i+1, ottenendo

$LRS_{i+1} T = LRS_i T$

LRS_{i+1}

GT

G

$LRS_{i+1} T =$

G

$LRS_{i+1} T - 1$

G

LRS , i T.

7) Dall'ultima matrice ottenuta è possibile estrarre gli angoli di rotazione relativa dei due segmenti considerati, secondo la convenzione di Cardano Bryant, di Eulero o altra ritenuta più conveniente.

8) Analizzando le posizioni del baricentro e le giaciture dei sistemi locali di ciascun segmento in istanti successivi è possibile ottenere, per derivazione numerica le velocità e accelerazioni lineari e angolari di tutti i segmenti. La procedura descritta è implementata nel software legato ai sistemi di acquisizione, nel quale sono anche presenti routines di ottimizzazione per minimizzare gli errori sperimentali.

Esercizi

Velocità e accelerazioni

1. *Sistema in moto roto-traslatorio.* Calcolare la posizione e velocità assoluta del punto B.

r

AB = 5 m

0 =

1

1, 5

35 °& ' 0r

1

;

0v

0

F =

A =

A =

0 , 4 rad

0

0

sec

B

r

Y

AB

ω

α

X

A

vA


 Image 489

 Image 490

 Image 491

 Image 492

 Image 493

5.12 Analisi cinematica

175

2. La rotazione del braccio OA avviene secondo la legge $\theta = 0,2 * t + 0,02 * t^3$. Nello stesso tempo l'equipaggio mobile B si muove lungo la scanalatura del braccio con la legge $r =$

$0,02 + 0,04 * t^2$. Calcolare il modulo della velocità dell'equipaggio mobile per $t = 3$ s.

Risposta. $v_r = 0,24$ m/s;

$v_P = 0,37$ m/s.

A

r

O

B

α

3. Una vettura di massa pari a 1200 kg percorre al limite dell'aderenza una curva di 45 m di raggio alla velocità di 65 km/h. Determinare l'accelerazione centripeta della vettura.

Soluzione. L'accelerazione centripeta, diretta dalla posizione della vettura verso il centro della curva ha l'espressione:

() 2

65

2

3,6

$$v_C = V =$$

$$= 7,24 \text{ m/s}^2.$$

R

45

4. L'asta in figura ha $a = 1 \text{ m}$, $b = 0,5 \text{ m}$. Determinare l'accelerazione vettoriale del punto P quando l'asta ruota in senso orario con $\dot{\varphi} = 20 \text{ rad/s}$ e $\ddot{\varphi} = 2 \text{ rad/s}^2$.

Soluzione. La posizione del punto P rispetto al sistema di riferimento O, X, Y ; rotante insieme all'asta è:

$$\mathbf{r}_P = a\mathbf{i} + b\mathbf{j};$$

$$\mathbf{v}_P = -b\dot{\varphi}\mathbf{i} + a\dot{\varphi}\mathbf{j};$$

$$\mathbf{a}_P = -b\ddot{\varphi}\mathbf{i} + a\ddot{\varphi}\mathbf{j}.$$

5. Nel quadrilatero articolato mostrato nella figura l'asta OA possiede una velocità angolare pari a 10 rad/s , costante, in senso antiorario. Nella posizione mostrata, le coordinate del punto A rispetto a un sistema di assi con origine nel punto O sono, $x_A = -50 \text{ mm}$, $y_A =$

80 mm , quelle di B $x_B = 200 \text{ mm}$ $y_B = 120 \text{ mm}$ e $OO_1 = 150 \text{ mm}$.

Determinare per mezzo di una costruzione grafica la velocità e l'accelerazione del punto B.

B

A

Y

O

X

1

 Image 494

 Image 495

176

5 Elementi di cinematica

Soluzione. Si ricordi che $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{r, BA}$. Si calcoli prima il modulo della velocità del punto A, dato da:

$$v_A = 10 \cdot OA = 10 \cdot$$

$$(0,062 + 0,082) = 1 \text{ m/s}$$

si riporti quindi con una scala opportuna un segmento che rappresenta \mathbf{v}_A , a partire dal punto A con direzione perpendicolare a OA e verso coerente col senso della velocità angolare dato. Si tracci poi in serie al segmento tracciato un segmento indefinito perpendicolare ad AB. Questo segmento rappresenta la direzione della velocità $\mathbf{v}_{r, AB}$ della velocità relativa di B rispetto ad A. Si tracci infine, sempre a partire dal punto A un segmento indefinito perpendicolare a OA. Questo segmento intersecherà quello precedente in un punto che individua il vettore velocità di B. Per le accelerazioni si ricordi che: $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_r, BA = \mathbf{a}_cA + \mathbf{a}_tA + \mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_2 \times \mathbf{AB} + \mathbf{F}_2 \times \mathbf{AB} =$

$$= \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_1 \times \mathbf{OA} + 0 + \mathbf{F}_2 \times \mathbf{AB} + \mathbf{F}_2 \times \mathbf{AB}$$

la costruzione grafica si limita a trasporre la precedente relazione vettoriale in termini geometrici. Si tracci quindi, usando una scala opportuna, un vettore di modulo pari a $\mathbf{F}_2 \times \mathbf{AB} = 100 \cdot 0,1 = 10 \text{ m/s}^2$ diretto secondo OA, con verso da A a O. Il vettore tracciato rappresenta l'accelerazione del punto A che, per l'ipotesi assunta $F_1 = \text{cost}$ coincide con l'accelerazione centripeta di A. si trasporti ora per comodità di costruzione il segmento

tracciato a partire dal punto **B**. Si tracci in serie al segmento trasportato un altro segmento, nella scala assunta, di modulo pari a $F2 \cdot AB$, parallelo ad **AB** e da **B** verso **A**. Si tenga pre-2

sente che il valore di $F2$ deve essere desunto dal modulo del segmento v_r , **BA**, pari appunto a $F2 \cdot AB$. Dalla punta dell'ultimo vettore tracciato si tracci ancora un segmento indefinito con direzione perpendicolare ad **AB**. A questo punto si ritorna al punto **B** per tracciare il vettore che rappresenta la sua accelerazione centripeta, di modulo pari a $F2 \cdot O$

3

1A. Il

valore di $F3$ viene calcolato a partire dal segmento che rappresenta la velocità v_B il cui modulo è appunto $F3 \cdot O1B$. Ovviamente la lunghezza del segmento deve prima essere convertita attraverso la scala delle velocità in m/s, prima di poter calcolare il valore di $F3$.

A questo punto si traccia ancora un segmento indefinito che rappresenta la linea d'azione dell'accelerazione tangenziale di **B**. Questo segmento incontrerà quello, anch'esso indefinito che rappresenta l'accelerazione tangenziale relativa di **B** rispetto ad **A**. L'intersezione ottenuta rappresenta la punta del vettore che rappresenta l'accelerazione di **B**. La costruzione grafica è riportata nella figura seguente. Per la costruzione si potranno usare tre scale diverse, la prima per la costruzione del quadrilatero, la seconda per le velocità, la terza per le accelerazioni.

 Image 496

 Image 497

5.12 Analisi cinematica

177

6. Un missile è lanciato verticalmente e la sua traiettoria è seguita da un radar. Quando l'angolo di puntamento raggiunge il valore $H = 60^\circ$ il

sistema di misura del radar fornisce i seguenti valori:

$$r = 8000 \text{ m} \quad \dot{r} = 21 \text{ m/s}$$

.

$$H = 0,02 \text{ rad/s}$$

Calcolare la velocità e l'accelerazione del missile.

Risposta. $\dot{x} = 0$; $\dot{r} = 277,13 \text{ m/s}$; $\dot{y} = 320 \text{ m/s}$; $\ddot{x} = 0$; $\ddot{H} = 2,67 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2$;

$$\ddot{y} = 5,47 \text{ m/s}^2.$$

7. Un treno, lanciato alla velocità di 100 km/h, frena diminuendo la sua velocità del 10% nei primi 40 s dall'applicazione dei freni.

Calcolare la velocità alla fine dei successivi 80 secondi, assumendo che, durante l'intero periodo di frenatura, la decelerazione sia proporzionale alla velocità.

Risposta. $v = 73 \text{ km/h}$.

8. L'ascensore principale della torre per comunicazioni CN a Toronto sale di 250 m e per la maggior parte della sua corsa ha una velocità di 22 km/h. Assumere che sia la fase d'accelerazione che quella di decelerazione siano percorse con un'accelerazione costante di $1/4 \times g$ (positiva la prima e negativa la seconda) e determinare la durata della corsa.

Risposta. $t = 43,4 \text{ s}$.

9. Un aereo di massa pari a 50 t atterra su una pista orizzontale alla velocità di 195 km/h con una componente di velocità verticale trascurabile. Subito dopo il contatto all'aeroplano viene applicata una forza frenante data dall'espressione $(55000 + 4 \times V^2) \text{ N}$, in cui V è la velocità dell'aereo. Calcolare la lunghezza della corsa di atterraggio.

 Image 498

 Image 499

 Image 500

178

5 Elementi di cinematica

10. Delle piccole sfere d'acciaio cadono da una posizione di riposo al ritmo di 2 al secondo.

Trovare la separazione verticale di due sfere consecutive, quando la più bassa è caduta per tre metri. Si trascuri la resistenza dell'aria.

Risposta. 2,72 m.

11. Uno scattista raggiunge la sua massima velocità v_{max} in 2,5 s dalla partenza con accelerazione costante. Quindi mantiene la velocità e termina i 100 m in un tempo totale di 10,4 s.

Determinare la velocità massima v_{max} .

Risposta. $v_{max} = 10,93$ m/s.

12. Il conducente di una vettura, inizialmente ferma nel punto A rilascia il freno a mano e lascia andare in folle la vettura con un'accelerazione pari a $0,981 - 0,013v^2$, essendo v la velocità del veicolo. Determinare la velocità in B.

Risposta. $v = 8,66$ m/s.

13. In una gara di tiro all'arco l'accelerazione della freccia varia linearmente con la distanza s dal suo valore iniziale di 4800 m/s² in A al rilascio dell'arco, sino a zero in B, dopo una corsa di 600 mm. Calcolare la velocità massima della freccia.

Risposta. $53,7$ m/s.

 Image 501

 Image 502

 Image 503

5.12 Analisi cinematica

179

14. Il baricentro di un saltatore in alto segue la traiettoria in figura.
Determinare la velocità v_0

al distacco e l'angolo H , se il culmine della traiettoria è appena al disopra dell'asta.

Risposta. $H = 64,7^\circ$, $v_0 = 5,03 \text{ m/s}$.

15. Un piccolo aeroplano vola orizzontalmente con una velocità di 300 km/h a una quota di 120 m sopra una valle alpina per lanciare medicinali d'emergenza in A. Il pacco ha un paracadute che si apre in B e permette la discesa verticale dei medicinali alla velocità costante di 1,8 km/h. Se il lancio è pianificato in modo tale che il pacco raggiunge il suolo dopo 37 s dopo il rilascio in A, determinare la distanza di anticipo orizzontale in modo tale che il pacco centri il punto d'atterraggio. Trascurare la resistenza dell'aria.

Risposta. $L = 401,2 \text{ m}$.

16. Un ragazzo lancia una palla verso l'alto con un'inclinazione X rispetto alla verticale e una velocità di 12 m/s. Il vento produce un'accelerazione orizzontale di $0,4 \text{ m/s}^2$ verso sinistra.

Con quale angolo deve essere lanciata la palla perché ritorni al punto di partenza?

Risposta. $H = 2,33^\circ$.

 Image 504

 Image 505

 Image 506

 Image 507

 Image 508

 Image 509

 Image 510

180

5 Elementi di cinematica

17. La velocità di un'auto aumenta uniformemente col tempo da 50 km/h in A a 100 km/h in B nell'arco di 10 s. Il raggio di curvatura della strada in A è 40 m. Se il modulo dell'accelerazione complessiva dell'auto è lo stesso in B e in A calcolare il raggio di curvatura della strada in B. Il baricentro dell'auto dista 0,6 m dal fondo stradale.

Risposta. 156,5 m.

18. Il piccolo blocco P parte da fermo al tempo $t = 0$ in corrispondenza del punto A e sale sul piano inclinato con accelerazione costante. Determinare \dot{r} in funzione del tempo.

Risposta. $\dot{r} =$

$$0,5 a t (2R \cos \theta + at^2)$$

.

$$(R^2 + R a t^2 \cos \theta + \frac{1}{4} a^2 t^4)$$

4

19. *Moto relativo.* Due navi A e B si muovono con velocità costante v_A , v_B lungo rotte che si intersecano. Il timoniere di B nota la velocità di

variazione della distanza r tra le navi e l'angolo di rilevamento H . Mostrare che

..

$$\ddot{H} = -2\dot{r}\dot{H}$$

$$\ddot{r} = r\dot{H}^2$$

r

 Image 511

 Image 512

 Image 513

 Image 514

 Image 515

 Image 516

 Image 517

 Image 518

5.12 Analisi cinematica

181

20. *Moto relativo tra due aerei.* Calcolare: posizione e velocità assoluta dell'aereo B.

Risposta.

$$r_{AB} = 5000 \text{ m}$$

$$H = 30^\circ$$

F =

rad

0, 1 sec

m

$\dot{r}_{AB} = 50 \text{ sec}$

[

]

[

]

{ 2000 }

{ 250 }

$0r_A = [3000]; 0v_A = [0];$

0

0

[

] [

] [

]

{ 6330 } { 2000 } { 4330 }

$r_B = [5500] = [3000] + [2500] .$

0

0

0

Calcolo di v_B .

La velocità assoluta dell'aereo B può essere calcolata con due procedimenti equivalenti.

$$v_B = d(r_A) + d(r_{AB}) = v_A + F \times r \, dt$$

dt

$$v_B = v_A + \dot{r}_{AB} \cdot \dots$$

{

} {

} {

} {

}

$$\{ 250 \} \{ -? \cdot F \cdot \sin(30) \} \{ \dot{r}_{AB} \cdot \cos(30) \} \{ 43,5 \}$$

$$v_B = d(r_A) + d(r_{AB}) =$$

0

$$? \cdot F \cdot \cos(30)$$

$$\dot{r}_{AB} \cdot \sin(30)$$

458,0

dt

dt

l

J + l

J + l

J = l

J .

0

0

0

0

21. La sfera A di massa 10 kg è attaccata all'asta di lunghezza $l = 0,8$ m in figura. La massa del carrello da solo è di 250 kg ed esso si muove con un'accelerazione a_0 . Quando $H = 90^\circ$, trovare l'energia cinetica del sistema se il carrello ha una velocità di 0,8 m/s 1) nella direzione di a_0 e 2) in direzione opposta ad a_0 . Si consideri la palla come un punto materiale.

Risposta. $E_1 = 112$ J;

$E_2 = 112$ J.

 Image 519

 Image 520

 Image 521

 Image 522

 Image 523

 Image 524

182

5 Elementi di cinematica

Velocità e accelerazione durante la corsa

22. Calcolare la posizione, la velocità e l'accelerazione assoluta del punto C rappresentativo della caviglia.

Risposta.

$$l_1 = OG = 0,45 \text{ m}$$

$$l_2 = GC = 0,45 \text{ m}$$

$$\theta_1 = 45^\circ$$

$$\theta_2 = 60^\circ$$

*

+

F

rad

$$1 = 1$$

sec* +

F

rad

$$2 = -0,5 \text{ sec}$$

$\{$ $\}$ $\{$ $\}$ $\{$ $\}$ $\{ 0, 2891 \}$ $\{ 0, 5355 \}$ $\{ - 0, 2891 \}$ $r_C =$ $-$ $\{ 0, 7529 \} \quad v_C = \{ 0, 2600 \} \quad a_C = \{ 0, 4269 \} .$ 0 0 0

23. Un pattinatore di massa pari a 74 kg piroetta con le braccia aperte intorno al suo asse con una velocità angolare di 1 giro/s. Calcolare la velocità angolare se il pattinatore porta le braccia aderenti al corpo, con le mani vicine all'asse mediano del corpo stesso. Come ragionevole approssimazione si modellino le braccia come aste snelle uniformi, ciascuna delle quali ha massa 7kg e 680 mm di lunghezza. Si modelli il torso come un cilindro uniforme di massa 60 kg e diametro 330 mm, si consideri l'uomo con le braccia aderenti al corpo come un cilindro uniforme di 74 kg e diametro 330 mm. Si trascuri l'attrito.

 Image 525

 Image 526

 Image 527

5.12 Analisi cinematica

183

Velocità e accelerazione durante la pedalata

24. Noto il valore di $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$, trovare la posizione del centro istantaneo di rotazione della tibia e calcolare ω_2 , ω_3 , $\dot{\omega}_2$,

ω_3 , \mathbf{v}_C , \mathbf{v}_G , \mathbf{a}_C , \mathbf{a}_G . Le ultime quattro incognite vettoriali potranno essere ricavate anche graficamente.

Risposta. {

}

{

}

{

}

{

}

{ 0, 100 }

{ - 0, 077 }

{ 0 }

{ - 0,173 }

vC =

-

-

-

[0,173] vG = [0,275] F2 = [0] aC = 1 [0,100]

0

0

0,454

0

[

]

[

]

[

]

{ - 0,262 }

{ 0 }

{ 0

}

$a_G =$

-

F

F

.

$[0, 258]$

$2 = [0]$

$3 = [0]$

J

0

0, 347

- 0, 717

 Image 528

 Image 529

6

Geometria delle masse

6.1 Baricentro di un corpo esteso

Il baricentro è il punto d'applicazione della risultante delle forze elementari di massa di un corpo. La sua posizione può essere determinata ricordando (teorema di Varignon) che il momento risultante delle forze peso delle singole particelle che compongono il corpo, rispetto a un polo arbitrario, è

eguale al momento della risultante, cioè al momento del peso del corpo, rispetto allo stesso polo. Si ottiene (Fig. 6.1):

"

"

$$(\mathbf{r}_P \times \mathbf{g}) \rho dx dy dz = \mathbf{r}_G \times \mathbf{g} \rho dx dy dz \quad (6.1.1)$$

da cui si ha:

"

"

"

"

$$\rho \mathbf{r}_P dx dy dz \times \mathbf{g} = \rho \mathbf{r}_G dx dy dz \times \mathbf{g} ; \rho \mathbf{r}_P dx dy dz = \rho \mathbf{r}_G dx dy dz \quad (6.1.2)$$

0

Dove $\mathbf{g} =$

0 , avendo adottato un sistema di riferimento con l'asse z perpendi-

$-g$

colare al terreno e diretto verso l'alto. La posizione del baricentro dipende soltanto dalla distribuzione delle masse. M è la massa totale del corpo considerato, \mathbf{r}_P e \mathbf{r}_G

G G

Z

P

\mathbf{r}_G

\mathbf{r}_P

Mg

O

Fig. 6.1. Il baricentro come punto d'applicazione della risultante delle forze di

Y

massa

X

X

Picasso B.: Fondamenti di Meccanica e Biomeccanica. Meccanica dei corpi rigidi articolati.

DOI 10.1007/978-88-470-2333-8_6, © Springer-Verlag Italia 2013

 Image 530

 Image 531

 Image 532

 Image 533

 Image 534

 Image 535

186

6 Geometria delle masse

sono rispettivamente i vettori che rappresentano la posizione della massa elementare e del baricentro. Possiamo quindi ruotare o traslare il corpo a piacere, senza che la posizione del baricentro rispetto al corpo venga mutata. Nell'ultima delle (6.1.2) \mathbf{g} è stato semplificato perché presente nei due membri dell'eguaglianza. Si ha quindi scrivendo le tre relazioni scalari corrispondenti all'ultima delle (6.1.2):

$$\int x g dx dy dz = x_G M$$

$$\int y g dx dy dz = y_G M$$

$$\int z g dx dy dz = z_G M$$

(6.1.3)

da cui si trae:

"

"

$$\int x dx dy dz$$

$$\int x dx dy dz$$

$$x_G = ,$$

=

$$\int dx dy dz$$

M

"

"

$$\int y dx dy dz$$

$\int y dx dy dz$

$y_G = \frac{1}{M} \int y dx dy dz$

$=$

$\int dx dy dz$

M

"

"

$\int z dx dy dz$

$\int z dx dy dz$

$z_G = \frac{1}{M} \int z dx dy dz$

$=$

$\int z dx dy dz$

M

(6.1.4)

$\int dx dy dz$

M

Se il corpo ha uno o più assi di simmetria il baricentro giacerà su questi. Ad esempio in un cilindro omogeneo il baricentro si troverà sull'asse del cilindro, a metà altezza, in un cubo a metà della congiungente i centri di due facce opposte.

6.2 Baricentri di figure piane

Se consideriamo una figura piana come un corpo nel quale una delle dimensioni è molto piccola rispetto alle altre due, la massa ha allora una distribuzione superficiale e non di volume. In questo caso si possono applicare le formule precedenti, con l'avvertenza che una delle coordinate diventa ridondante, in genere la z , se si assume che la figura giaccia nel piano $x-y$. La densità ρ diventa una densità d'area, in genere di valore unitario, invece che una densità di volume. Il lettore può trovare nei manuali tabelle che forniscono la posizione del baricentro per le principali figure piane, ad esempio i poligoni regolari.

Esempi

Baricentro di un rettangolo

Si trova nell'intersezione delle due diagonali.

Baricentro di un cerchio

Si trova nel suo centro.

 Image 536

 Image 537

 Image 538

6.2 Baricentri di figure piane

187

Fig. 6.2. Sezione rettangolare

Baricentro di sezioni piane non regolari

Cominciamo a trovare la posizione del baricentro per una sezione piana, costituita dall'unione di due rettangoli, la sezione a L rappresentata in Fig. 6.2: si considerano le aree dei rettangoli, rappresentate dai vettori A_1 , A_2 , orizzontali. La coordinata y_G del baricentro si ottiene con la condizione che la somma dei momenti, rispetto all'origine degli assi, dei due vettori A_1 ,

A_2 considerati come forze orizzontali, sia uguale al momento della risultante (cioè dell'area totale della figura), rispetto allo stesso polo.

Si ottiene quindi la relazione scalare:

$$y_G = A_1 y_1 + A_2 y_2 .$$

(6.2.1)

$$A_1 + A_2$$

Analogamente considerando un insieme di vettori verticali che rappresentano le stesse aree A_1, A_2 , si ottiene per la coordinata x del baricentro: $x_G = A_1 x_1 + A_2 x_2 .$

(6.2.2)

$$A_1 + A_2$$

Baricentro di sezioni piane forate

Quando, come nel caso in Fig. 6.3, una sezione non è omogenea, si può sempre ricorrere al principio di considerare le singole aree che costituiscono la figura come vettori, con l'avvertenza che le aree vuote saranno rappresentate da vettori di verso Y

A_2

y_2

$A_1 X$

y_G

G

$A_1 - A_2$

Fig. 6.3. Baricentro di sezioni piane forate

 Image 539

 Image 540

 Image 541

 Image 542

188

6 Geometria delle masse

contrario a quello delle aree piene. Nel nostro caso, sia A_1 l'area della figura senza il foro, A_2 l'area del foro. Si ha allora, ricordando che i momenti sono positivi se tendono a provocare una rotazione antioraria, negativi in caso contrario e assumendo l'origine come polo:

$$A_1 * 0 + A_2 * y_2 = -(A_1 - A_2) * y_G$$

;

$$y_G = - A_2 * y_2 / (A_1 - A_2) .$$

Data la simmetria della sezione, la coordinata x del baricentro è nulla.

Baricentro di corpi lineari

Se il corpo presenta una sola dimensione, può essere assimilato a un segmento rettilineo o curvo, la massa del corpo ha una distribuzione lineare. Se si ammette che la densità sia unitaria, gli elementi di massa del corpo corrispondono alla lunghezza di un segmento infinitesimo. Anche in questo caso s'impone che la somma dei momenti elementari degli elementi di massa (equivalenti alle lunghezze), rispetto a un polo qualsiasi, sia uguale al momento dell'intera massa (o lunghezza) rispetto allo stesso polo.

Esempio 6.1. Baricentro di un arco di circonferenza d'apertura $2H_0$: considerando l'arco diviso in elementi infinitesimi di apertura dH rappresentato da un sistema di forze infinitesime con direzione orizzontale e modulo RdH , la somma dei momenti di queste forze rispetto al polo O

sarà eguale al momento della loro risultante il cui modulo è $2RH_0$ con braccio y_G . Si ha allora:

" H_0

$\sin H_0$

2

$$RR \cos H dH = 2RH_0 y_G$$

da cui

$$y_G = R$$

0

H_0

per una semicirconferenza si ha:

$$y_G = 2R .$$

>

Baricentro di un settore circolare

Considerando un settore circolare d'apertura $2H_0$, Fig. 6.5, come nel caso precedente, per calcolare il baricentro possiamo sostituire ad ogni settore di apertura infinitesima dH un punto materiale di massa (area) $1 R^2 dH$, posto nel baricentro del settore, cioè 2

Fig. 6.4. Baricentro di un corpo lineare

 Image 543

 Image 544

 Image 545

 Image 546

 Image 547

 Image 548

 Image 549

 Image 550

 Image 551

 Image 552

 Image 553

 Image 554

6.3 Baricentro di solidi regolari

189

Fig. 6.5. Baricentro di un settore circolare

Fig. 6.6. Baricentro di un tronco di cono

a distanza $2R$ dal centro O . Al limite, per dH tendente a 0 tutti questi punti
forme-3

ranno una circonferenza di raggio $2R$, per il quale la coordinata y del
baricentro si 3

troverà applicando il principio secondo il quale la somma dei momenti
elementari delle singole aree infinitesime rispetto ad un polo è uguale al
momento dell'intera area rispetto allo stesso polo. Avremo quindi:

" H_0^2

sin H_0

2

$$R \cos H \int_0^H R^2 dH = 2 R^3 \sin H \Big|_0^H = 1 - 2R^2 H \Big|_0^H y_G;$$

$$y_G = 2 R$$

0

3

2

3

2

3

H0

per un semicerchio si ha y

R

$$G = 4$$

3 > .

6.3 Baricentro di solidi regolari

Ancora una volta è possibile applicare le formule precedenti, o ricorrere alle tabelle che forniscono la posizione del baricentro per una larga serie di solidi regolari. In molti casi, come quello dei solidi a simmetria cilindrica, le formule precedenti vanno trasformate passando alle coordinate polari. A titolo d'esempio della procedura indicata, si procederà alla ricerca del baricentro di un tronco di cono. Osservando che l'asse z è di simmetria, si deduce che due coordinate del baricentro sono $x_G = y_G = 0$.

Per quanto riguarda z_G , si pensi che ogni strato infinitesimo di raggio generico r e spessore dz , ottenuto sezionando il tronco di cono con piani perpendicolari a z , avrà una massa infinitesima pari a $\rho \pi r^2 dz$. Considerando la massa di ogni sezione infinitesima come una forza orizzontale di momento pari a $\rho \pi r^2 z dz$, poichè la funzione lineare che rappresenta il raggio della sezione generica del solido in funzione di z , è data dalla relazione $r = R - (R - r)z/h$, integrando i momenti elementari delle sezioni

rette infinitesime rispetto all'origine e dividendo il momento risultante per il volume

 Image 555

 Image 556

 Image 557

 Image 558

 Image 559

 Image 560

 Image 561

 Image 562

190

6 Geometria delle masse

del tronco di cono si ha:

,

\$

%

$h >$

2

$R - (R - r)z \, dz$

$R^2 + 2Rr + 3r^2$

z

0

h

$G = ,$

$\$$

$\%$

$= h$

\cdot

(6.3.1)

$h >$

2

$R - (R - r)z \, dz$

$4 R^2 + Rr + r^2$

0

h

A titolo d'esempio e per un utilizzo successivo, si ritiene utile fornire qualche dato, desunto dalla letteratura, sulle dimensioni e la posizione dei

baricentri di segmenti corporei per una persona di media statura. I segmenti sono qui concepiti come sezioni piane e perdono così una dimensione. Poiché il corpo umano può assumere nel suo movimento configurazioni assai diverse, la posizione del baricentro del corpo subisce, in conseguenza, forti cambiamenti. In Fig. 6.7, sono mostrate le posizioni dei baricentri dei segmenti corporei per una persona seduta. La Tabella 6.1 riportata nel seguito, tratta dalla letteratura, fornisce le caratteristiche di peso e posizione del **Tabella 6.1**. Peso medio dei segmenti corporei di un uomo di 670 N (68,4 kg) espresso in percentuale del peso totale e posizione dei baricentri

Peso dei segmenti e percentuale

Posizione baricentro

sul peso totale

Testa 46,2 N

Nel seno sfenoidale, 4 mm oltre il margine antero-inferiore della sella

Testa e collo 52,9 N (7,9 %)

Sulla superficie inferiore dell'osso basioccipitale o nell'osso 23?5 mm dal dorso della sella

Testa collo e tronco 395,3 (59 %)

Anteriormente alla XI vertebra toracica

Braccio 18,1 N (2,7 %)

Nel capo mediale del tricipite, adiacente all'incisura radiale

Avambraccio 10,7 N (1,6 %)

11 mm, prossimale alla parte distale dell'inserzione
del pronatore quadrato

Mano 40 N (0,6 %)

Sull'asse del 3° metacarpo, 2 mm in profondità
rispetto alla superficie cutanea volare

Arto superiore 32,8 N (4,9 %)

Avambraccio e mano 14,7 N (2,2 %)

Coscia 65,0 N (9,7 %)

Nel vasto mediale, 13 mm medialmente alla linea
aspra, sotto il canale degli adduttori

Gamba 30,2 N (4,5 %)

35 mm sotto il popliteo, nella parte posteriore
del tibiale posteriore; 16 mm sopra l'estremità
prossimale del tendine d'Achille

Piede 9,4 N (1,4 %)

Nei legamenti plantari o appena sopra i muscoli pro-
fondi del piede adiacenti, sotto la metà prossimale
del 2° e 3° cuneiforme

Arto inferiore 104,5 N (15,6 %)

Gamba e Piede 40,2 N (6,0 %)

Intero Corpo

Anteriormente alla 2^o vertebra sacrale

 Image 563

 Image 564

6.4 Baricentro di corpi irregolari

191

Fig. 6.7. Posizione del baricentro nei segmenti del corpo umano baricentro di tutti i segmenti corporei. È appena necessario ricordare che esistono grandi masse di dati biometrici cui è possibile facilmente attingere. Più moderne e aggiornate sono le banche dati costituite da modelli tridimensionali del corpo umano, ottenuti con un processo di scansione, che replica con precisione la morfologia del corpo, inclusi gli organi interni.

6.4 Baricentro di corpi irregolari

È spesso necessario ricorrere alla determinazione di segmenti del nostro corpo, la cui forma è irregolare e non riconducibile a quella di un solido elementare. Inoltre il corpo non è omogeneo perché in esso sono presenti tessuti di vario tipo e consistenza.

Pensiamo a fasce muscolari, osso corticale e trabecolare, connettivi, vasi sanguigni e linfatici. Il problema della determinazione del baricentro si presenta quindi assai complesso. Procedendo per approssimazioni successive, possiamo, inizialmente assimilare il segmento in esame ad un solido omogeneo e applicare i metodi visti in precedenza. Si consideri ad esempio il problema della determinazione del baricentro in una gamba piegata, come nella Fig. 6.8. La procedura può partire da misure an-
Fig. 6.8. Baricentro della gamba piegata

 Image 565

 Image 566

 Image 567

 Image 568

192

6 Geometria delle masse

tropometriche in due dimensioni, per ottenere un profilo 2D dell'arto. Si riporta in scala il profilo, dividendolo in sezioni di uguale spessore. Per la sezione i -esima si calcolano le coordinate x_i , y_i del punto a metà spessore. Di ogni sezione si calcola anche il volume. Se si dispone del dato di profondità della sezione, si può assimilare quest'ultima ad un'ellisse. La densità media dell'arto si può ottenere dal rapporto massa/volume. Le coordinate del baricentro rispetto al sistema di coordinate assunto nel piano della rappresentazione, sono date dalle espressioni:

$$V_k = \int h_k t_k^2 dx$$

;

$$m_k = \rho V_k$$

$$\sum m_k x_k$$

$$\sum m_k y_k$$

x

k

k

$$G =$$

\sum

$$y_G =$$

(6.4.1)

m_k

$\sum m_k$

k

k

In cui h_k è l'altezza della sezione, t_k la sua profondità nella direzione normale al piano XY , ρ_k lo spessore nella direzione X , ρ la densità media dell'arto.

Il procedimento può essere applicato separatamente ai diversi segmenti, coscia gamba e piede. Una volta trovati i baricentri di questi le espressioni del baricentro di tutta la gamba sono analoghe alle (6.4.1).

3

3

$x_{GG} = \sum M_i x_{G_i}$

$y_{GG} = \sum M_i y_{G_i}$

(6.4.2)

$i=1$

$i=1$

Se si volesse ottenere una migliore approssimazione rispetto a quella ottenuta considerando il materiale omogeneo, si può ricorrere ad una analisi sezione per sezione, utilizzando ad esempio una scansione 3d dell'arto. La Fig. 6.9 rappresenta una generica sezione, dove appaiono i tessuti muscolari e l'osso. Anche in questo caso si può procedere alla

determinazione del baricentro della singola sezione tracciando una serie di triangoli o altri poligoni regolari per cui si determinano le coordinate dei vertici e quelle del baricentro. Una volta trovati i baricentri di tutti i triangoli e le aree corrispondenti si applicano le formule seguenti, per ottenere il baricentro della fetta considerata. L'area di un triangolo, date le coordinate dei suoi vertici, si ottiene con la formula:

!!

!

! 1 1 1 !!

A = 1 ! x

!

1

x₂ x₃ .

(6.4.3)

2 !!

!

y

!

1

y₂ y₃

Fig. 6.9. Una sezione generica della gamba

 Image 569

 Image 570

 Image 571

 Image 572

 Image 573

 Image 574

 Image 575

6.4 Baricentro di corpi irregolari

193

Le coordinate del baricentro sono date invece dall'espressione: $x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

(6.4.4)

3

3

Sono cioè le medie delle coordinate dei vertici.

Una volta note le aree dei singoli triangoli e i rispettivi baricentri, nonché le coordinate del baricentro della sezione ossea con la rispettiva area, supposta circolare o assimilabile all'area di un poligono regolare, è possibile calcolare il baricentro della singola fetta con le formule:

n

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_k x_{k,i}}{\sum_{i=1}^n A_k}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_k y_{k,i}}{\sum_{i=1}^n A_k}$$

i=1

$G, k =$

;

(6.4.5)

n

$\rho_m \sum_{i=1}^n A_{k,i} + \rho_o A_{o,k}$

$i=1$

n

$\rho_m \sum_{i=1}^n A_{k,i} z_{G,k,i} + \rho_o A_{o,k} z_{G,o}$

$i=1$

$G, k =$

.

(6.4.6)

n

$\rho_m \sum_{i=1}^n A_{k,i} + \rho_o A_{o,k}$

$i=1$

In cui ρ_m ρ_o sono rispettivamente le densità dei tessuti muscolari e dell'osso, $A_{k,i}$ $A_{o,k}$ sono rispettivamente le aree del triangolo i -esimo della sezione k -esima e l'area dell'osso, sempre per la sezione k -esima. Ottenute le coordinate dei baricentri delle singole sezioni, si procede con le:

m

m

m

$$\sum_{k=1}^m m k x_{G,k}$$

$$\sum_{k=1}^m m k y_{G,k}$$

$$\sum_{k=1}^m m k z_{G,k}$$

x

$$k=1$$

$$k=1$$

$$k=1$$

$$GG =$$

y

z

.

(6.4.7)

m

$$GG =$$

m

$$GG =$$

m

$$\sum m k$$

$$\sum m k$$

$$\sum_{k=1}^n m_k$$

$$k=1$$

$$k=1$$

$$k=1$$

In cui le m_k masse delle singole fette, sono date dall'espressione: n

$$m_k = \rho_m \sum_{i=1}^n A_{k,i} \cdot \rho_{AO}, k \leq n.$$

(6.4.8)

$$i=1$$

La procedura richiede un'elaborazione digitale, perché manualmente sarebbe lunga e fastidiosa. A questo scopo sono diffusi i sistemi di digitalizzazione e triangolazione di un'immagine, di uso frequente nel metodo degli elementi finiti.

Determinazione sperimentale dei baricentri

La determinazione sperimentale del baricentro di un corpo umano, assumendo il piano sagittale come piano di simmetria, può compiersi quando si abbia un dispositivo del tipo indicato in Fig. 6.10. Il paziente è disteso su una piattaforma strumentata con celle di carico, che si comporta come una trave appoggiata. Dopo l'azzeramento iniziale, per escludere dai calcoli il peso proprio del lettino, con il paziente disteso sono

 Image 576

194

6 Geometria delle masse

Fig. 6.10. Determinazione speri-

mentale del baricentro

misurate le reazioni vincolari in A e B per mezzo delle celle di carico. Si utilizzano le semplici relazioni

$$R_b(a + b) = W_a$$

$$R_a(a + b) = W_b$$

$$R_a + R_b = W .$$

(6.4.9)

Che forniscono la posizione del baricentro attraverso le lunghezze a , b e il peso del paziente. Ricordiamo ancora che se sospendiamo un corpo a un filo, il baricentro del corpo si disporrà sul prolungamento della linea individuata dal filo. Utilizzando questo sistema si può trovare la posizione del baricentro di un corpo, anche se il metodo non è agevole per il corpo umano.

6.5 Proprietà inerziali

Le proprietà inerziali di un corpo solido sono rappresentate dalla matrice di massa \mathbf{M}

e dalla matrice d'inerzia \mathbf{J} . La matrice di massa è diagonale, di rango 3.

[

]

m

0

0

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

m

0] .

(6.5.1)

0

0

m

La matrice d'inerzia di un corpo solido ha la forma:

[

]

J_{xx}

$- J_{xy} - J_{xz}$

$J = \begin{bmatrix} - J$

]

y_x

J_{yy}

$- J_{yz} .$

(6.5.2)

$- J_{zx} - j_{zy}$

J_{zz}

La matrice diventa diagonale quando gli assi di riferimento sono assi principali d'inerzia. Le espressioni dei termini della matrice sono:

" " "

" " "

$$J_{xx} =$$

$$\int (y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$J_{yy} =$$

$$\int (x^2 + z^2) dx dy dz$$

$$J_{xy} =$$

$$\int x y z dx dy dz$$

" " "

" " "

$$J_{zz} =$$

$$\int (x^2 + y^2) dx dy dz$$

$$J_{xy} =$$

$$\int (xy) dx dy dz$$

$$J_{yz} =$$

$$\int x y z dx dy dz$$

" " "

" " "

$$J_{xz} =$$

$$\int (xz) dx dy dz$$

$J_{yz} =$

$\int (yz) dx dy dz .$

(6.5.3)

$x y z$

$x y z$

 Image 577

 Image 578

 Image 579

 Image 580

 Image 581

 Image 582

6.5 Proprietà inerziali

195

Fig. 6.11. Momenti d'inerzia di un cilindro

Applicare le formule richiede semplici passaggi matematici. Ricordiamo che, se il corpo presenta un asse di simmetria, questo è anche asse principale d'inerzia. Come esempio calcoliamo i momenti d'inerzia di un solido cilindrico regolare rispetto agli assi principali d'inerzia baricentrici, diretti cioè come l'asse del cilindro e come due diametri ortogonali qualsiasi della sezione, passanti per il baricentro del cilindro. Le formule precedenti devono essere trasformate per tener conto della simmetria circolare. Se consideriamo inizialmente una sezione di spessore infinitesimo dz , passando dalle coordinate Cartesiane a quelle polari, otteniamo:

R

" 2>

"

?>R4

dJzz = dz

r2rdrdH =

dz .

2

0 0

Il momento d'inerzia totale rispetto all'asse del cilindro si ottiene integrando su z l'espressione ottenuta, ricavando:

Jzz = Mr2

essendo

$$M = \int_0^R 2\pi r^2 h \cdot r \, dr$$

2

I momenti rispetto agli altri due assi si ottengono per lo strato infinitesimo dalle relazioni seguenti:

" "

"

R

2>

R4

2>

$$dI_{xx} = ?$$

$$r^3 \sin^2 \theta \, d\theta \, r \, dz = ?$$

$$\int_0^R r^4 \sin^2 \theta \, dr = \int_0^R r^4 \, dr = dI_{yy} .$$

0

0

4

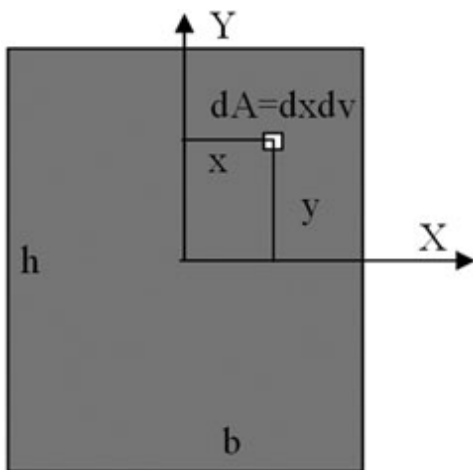
0

4

Si ricordi ora che, per il teorema di Huygens:

Il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse non baricentrico si ottiene sommando al momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse baricentrico e parallelo al primo, il prodotto della massa del corpo per il quadrato della distanza tra i due assi.

Si ha allora, considerando che il momento d'inerzia di una sezione di spessore infinitesimo dz , rispetto ad un asse diametrale vale $\frac{1}{12} r^4 dz$ e il momento di trasporto 4



?> r20 z2dz, integrando rispetto a z si ha:

$$h/2$$

"

$$> r4$$

$$r4h$$

$$h2$$

$$r2$$

$$J$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

$$xx = Jyy =$$

?

$$+ >r2$$

$$dz = ?>$$

$$+ r20$$

$$= M$$

$$+ h2 .$$

$$4$$

$$0z2$$

4

12

4

12

– h / 2

(6.5.4)

Momenti d'inerzia di figure piane

Nell'analisi delle sollecitazioni entrano in gioco le proprietà inerziali delle sezioni, cioè i momenti d'inerzia dell'area rispetto all'asse scelto. La capacità di resistere a determinati tipi di sollecitazione è infatti legata alla forma della sezione. Per la sezione rettangolare in Fig. 6.12, si consideri un elemento infinitesimo d'area A distante x e y rispettivamente dagli assi Y e X . I suoi momenti d'inerzia rispetto agli assi si ottengono dalle espressioni già trovate per i momenti d'inerzia di massa.

$$dI_{xx} = y^2 dA = y^2 dx dy \quad dI_{yy} = x^2 dA = x^2 dx dy$$

$$dI_{xy} = xy dA = xy dx dy$$

$$dI_{zz} = (x^2 + y^2) dA = (x^2 + y^2) dx dy .$$

Integrando le espressioni precedenti a tutta l'area della sezione, larga b e alta h , si ha:

"

"

"

"

$b / 2$

$$h/2$$

$$b/2$$

$$h/2$$

$$I_{xx} =$$

$$\int y^2 dx dy = bh^3 = Ah^2$$

$$I_{yy} =$$

$$\int x^2 dx dy = b^3h = Ab^2$$

$$- b/2 - h/2$$

$$12$$

$$12$$

$$- b/2 - h/2$$

$$12$$

$$12$$

"

"

$$b/2$$

$$h/2$$

$$I_{zz} =$$

$$(x^2 + y^2) dx dy = A(b^2 + h^2) = I_{xx} + I_{yy} .$$

(6.5.5)

$$- b/2 - h/2$$

12

Ad esempio per ottenere il valore del momento d'inerzia I_{x-x} di un cilindro rispetto ad un asse parallelo all'asse X e appartenente alla base inferiore, si ottiene: $I_{x-x} = I_{xx} + A \cdot h^2 = bh^3 + bh^3 = bh^3$.

4

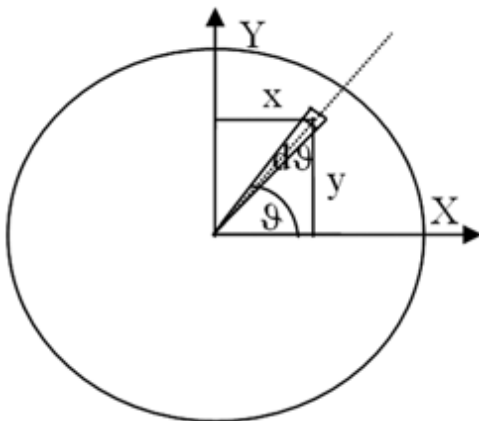
12

4

3

Questo risultato poteva anche essere ottenuto direttamente mediante l'integrale che esprimeva I_{xx} , cambiando i limiti d'integrazione. Si lascia al lettore la verifica di quanto detto.

Fig. 6.12. Momenti d'inerzia di un rettangolo



6.5 Proprietà inerziali

Fig. 6.13. Momento d'inerzia di una sezione circolare***Momento d'inerzia di una sezione circolare***

Si consideri un elemento infinitesimo d'area limitato tra due raggi formanti l'angolo infinitesimo dH e due archi infinitesimi di circonferenza, di raggio rispettivamente r e $r + dr$. L'elemento, la cui area infinitesima vale, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore, $rdHdr$ si trova alle distanze y e x rispettivamente dagli assi X e Y . I momenti d'inerzia infinitesimi rispetto ai tre assi hanno le espressioni: $dI_{xx} = rdHdr * r^2 \sin^2 H$

$$dI_{yy} = rdHdr * r^2 \cos^2 H$$

$$dI_{xy} = rdHdr * r^2 \sin H \cos H$$

$$dI_{zz} = rdHdr * (r^2 \sin^2 H + r^2 \cos^2 H) = dI_{xx} + dI_{yy} .$$

(6.5.6)

I momenti d'inerzia di tutta la sezione si ottengono per integrazione dalle espressioni precedenti:

" "

"

"

R

 $2 >$ $2 >$ $2 > (1 - \cos 2H)$ $I_{xx} =$

$$r^3 \sin^2 H \, dH = R^4$$

$$\sin^2 H \, dH = R^4$$

$$\Rightarrow R^4 = I_{yy}$$

0

0

4

0

4

0

2

4

" "

"

R

2>

2>

$I_{xy} =$

$$r^3 \sin H \cos H \, dH = R^4$$

$$\sin(2H) \, dH = 0 \quad I_{zz} = 2I_{xx} = > R^4 .$$

(6.5.7)

0

0

4

0

2

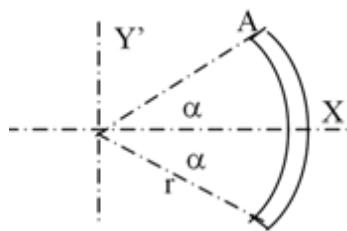
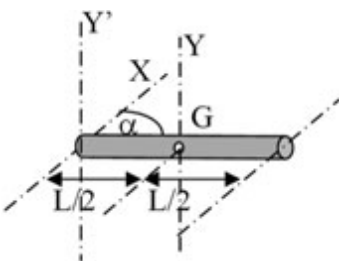
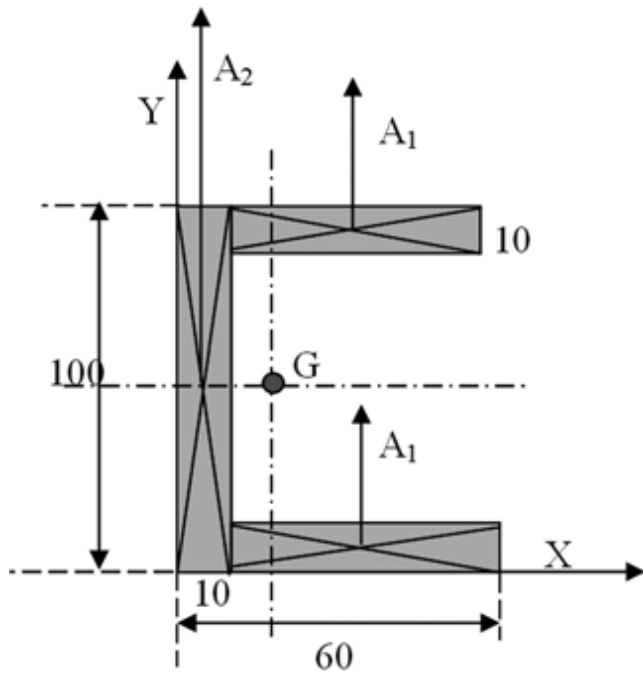
Momenti d'inerzia di sezioni composite

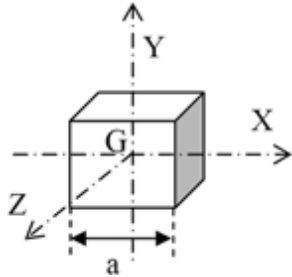
Ci riferiamo a sezioni composte da poligoni regolari come rettangoli, cerchi o semicerchi etc. In questi casi il momento d'inerzia rispetto ad un asse baricentrico si ottiene calcolando i momenti d'inerzia baricentrici delle singole parti, ed applicando il teorema di Huygens.

Esempio 6.2 (Sezione a C). Si voglia calcolare il momento d'inerzia della sezione a C in Fig. 6.14 (quote in mm), rispetto ad un asse baricentrico parallelo all'asse X. Calcoliamo prima il baricentro, la cui coordinata y_G risulta pari a 50, per la simmetria della sezione. La coordinata x_G si ottiene scrivendo che i momenti delle aree elementari della sezione, devono eguagliare il momento della risultante, cioè dell'area totale:

$$2A_1x_1 + A_2x_2 = (2A_1 + A_2)x_G .$$

Svolti i semplici calcoli si ottiene: $x_G = 20$ mm.





198

6 Geometria delle masse

Fig. 6.14. Sezione a C

Per le ali della sezione a C il momento d'inerzia rispetto ad un asse che passa per il loro baricentro è $50 * 103 = 4167 \text{ mm}^4$, per il rettangolo verticale $10 * 1003 =$

12

12

833333 mm^4 . Tenendo conto dei momenti di trasporto si ottiene:

$$J_{xx} = 2 * (4167 + 500 * 452) + 833333 = 20139683 \text{ mm}^4 .$$

È facile osservare che l'elevato valore del momento d'inerzia, in diretta relazione con la rigidità a flessione, viene ottenuto perché le ali sono lontane dall'asse, rispetto al quale il momento d'inerzia viene calcolato.

Tabella 6.2. Proprietà d'inerzia di solidi regolari

Solido

Volume

Momento d'inerzia

2

Asta sottile rettilinea

L

$$I_Y = M L^3$$

$$V = A * L$$

3

L²

$$I_{YY} = M L^3$$

L²

$$I_{XX} = M L^3$$

$$* \sin^2 \theta$$

3

Asta sottile curva

r²

$$I_Y = M (1 + \sin^2 \theta \cos^2 \theta)$$

$$V = 2\pi * r * A$$

2

0

r^2

$$I_{XX} = M (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta)$$

2

0

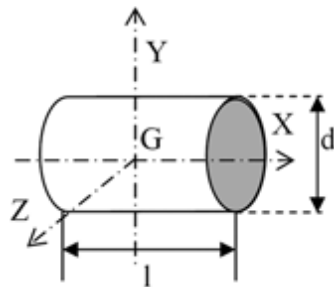
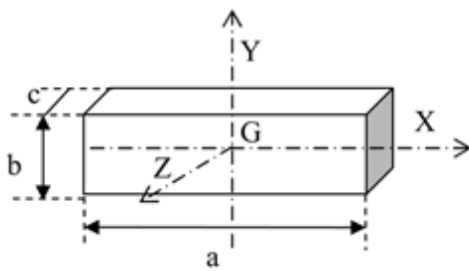
Cubo

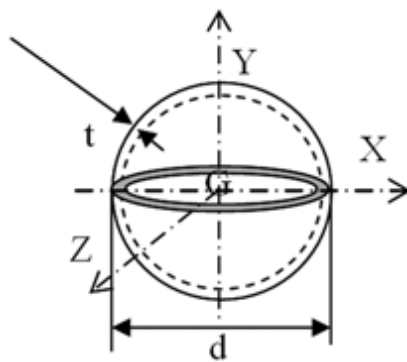
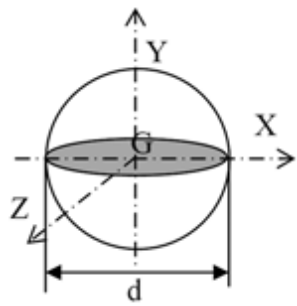
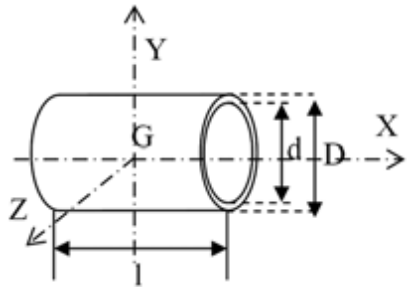
a^2

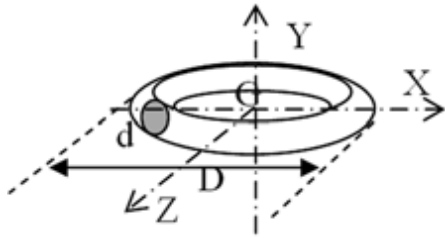
$$I_{XX} = I_{YY} = I_{ZZ} = M$$

$$V = a^3$$

6







6.5 Proprietà inerziali

199

Solido

Volume

Momento d'inerzia

Parallelepipedo

$$I_{XX} = M (b^2 + c^2)$$

12

$$V = a * b * c$$

$$I_{YY} = M (a^2 + c^2)$$

12

$$I_{ZZ} = M (a^2 + b^2)$$

12

Cilindro pieno

$$I_{XX} = M d^2$$

8

$$V = > d^2 * l$$

4

$$I_{YY} = I_{ZZ} = M (d^2 + l^2)$$

4

4

3

Cilindro cavo

$$I_{XX} = M * (D^2 + d^2)$$

8

$$V = >l(D^2 - d^2)$$

b^2

4

$$I_{YY} = M * (D^2 + d^2 + 4$$

)

16

3

Sfera>

I

d3

$$XX = IYY = IXX = Md^2$$

10

$$V = 6$$

Sfera cava

$$IXX = IYY = IZZ = Md^2$$

$$V = \pi d^2 t$$

6

Toro

$$IXX = M(D^2 + 5 d^2)$$

8

32

$$V = 2 Dd$$

4

$$IYY = M(D^2 + 3 d^2)$$

4

16

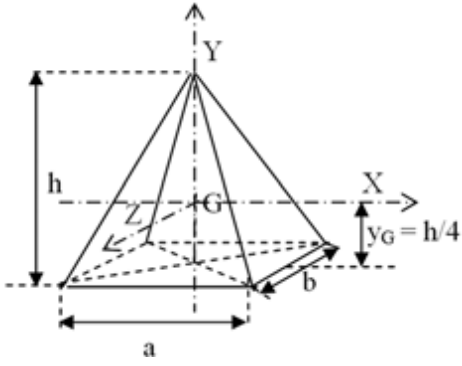



 Image 674


 Image 675

 Image 676

 Image 677

 Image 678

 Image 679

 Image 680


 Image 681

 Image 682

 Image 683

 Image 684

 Image 685

 Image 686

 Image 687

 Image 688

 Image 689

 Image 690

 Image 691

 Image 692

 Image 693

 Image 694


 Image 695

 Image 696

 Image 697

 Image 698

 Image 699

 Image 700

 Image 701

 Image 702

 Image 703

 Image 704

 Image 705

 Image 706

 Image 707

 Image 708

200

6 Geometria delle masse

Solido

Volume

Momento d'inerzia

Piramide

I

$$(b^2 + 3h^2)$$

h

$$XX = M$$

20

4

$$V = ab^3$$

$$IYY = M(a^2 + b^2)$$

20

Cono

$$IXX = 3 M(D^2 + h^2)$$

>

40

D²h

$$V = 12$$

$$I_{yy} = 3 MD^2$$

40

Tronco di cono

$$(D^5 - d^5)$$

>

I

M

h

√

$$YY = 3$$

40

$$(D^3 - d^3)$$

V =

$$(D^2 + d^2 + Dd)$$

12

$$y_G = 3(2r - h)$$

8

$$y_G = h(D^2 + 2Dd + 3d^2)$$

$$4(D^2 + Dd + d^2)$$

Settore sferico

$$I_{YY} = M (3rh - h^2)$$

5

$$V = 2 > r^2h$$

3

$$y_G = 3 (2r - h)$$

8

$$(2r - h)^2$$

$$y_G = 34 (3r - h)$$

Segmento sferico

$$I_{YY} = M(r^2 - 3rh +$$

4

$$V = >h^2(r - h)$$

3h^2

3

) 2h

$$20 3r - h$$

 Image 709

 Image 710

 Image 711

6.5 Proprietà inerziali

201

Esercizi

Baricentri e momenti d'inerzia

1. Si calcoli la posizione del baricentro delle sezioni in figura e il momento d'inerzia rispetto ad un asse orizzontale baricentrico.

Soluzioni. Coordinate in mm; momenti d'inerzia in mm⁴: a) $x_G = 66,42$ $y_G = 43,57$ $I_{XX} = 6,97 * 10^6$

$$I_{YY} = 10,83 * 10^6$$

I_{XY}

$$= 2,98 * 10^6$$

$$= 1,57 * 10^6;$$

I_{XX}

I_{YY}

b) $x_G = 21,67$ $y_G = 40$ $I_{XX} = 4,54 * 10^6$

$$I_{YY} = 1,46 * 10^6$$

I_{XY}

$$= 1,66 * 10^6$$

$$= 0,61 * 10^6;$$

I_{XX}

I_{YY}

$$c) x_G = 0 \quad y_G = 0 \quad I_{XX} = 7,87 * 106$$

$$I_{YY} = 0,37 * 106$$

IX

$$= 2,87 * 106 \text{ I}$$

$$= 0,37 * 106;$$

G XG

YGYG

$$d) x_G = -1,14 \quad y_G = 0 \quad I_{XX} = 10,17 * 106$$

$$I_{YY} = 9,66 * 106$$

IX

$$= 10,17 * 106 \text{ I}$$

$$= 9,65 * 106;$$

G XG

YGYG

$$e) x_G = 49,03 \quad y_G = 50,97 \quad I_{XX} = 33,2 * 106$$

$$I_{YY} = 31,31 * 106$$

IX

$$= 8,03 * 106 \text{ I}$$

$$= 8,03 * 106.$$

G XG

YGYG

 Image 712

 Image 713

 Image 714

 Image 715

 Image 716

202

6 Geometria delle masse

2. L'albero di trasmissione è d'acciaio con densità $\rho = 7850 \text{ kg / m}^3$. Si calcoli il momento d'inerzia di massa rispetto all'asse z. Le quote sono in mm.

Risposta. $J_{ZZ} = 2,32 * 10^{-2} \text{ kg} * \text{m}^2$.

3. Nel corpo a forma di parallelepipedo, le dimensioni secondo X, Y, Z, sono rispettivamente $a = b = 1 \text{ m}$, $c = 1,5 \text{ m}$. La densità del corpo è pari a 3500 kg / m^3 . Determinare il valore del momento d'inerzia I_{zz} , rispetto all'asse Z passante per lo spigolo verticale.

Risposta. $J_{zz} = 3500 \text{ kg} * \text{m}^2$.

4. *Modello 2D dell'apparato locomotore.* Calcolare la distanza della retta d'azione di P_0 dal punto A necessaria per l'equilibrio del sistema in figura. Sono note le forze agenti sull'anca e sulla massa concentrata in corrispondenza del ginocchio – indicato con la lettera G.

$P_0 = 565 \text{ [N]}$

$P_2 = 1$

$[\text{N}]$

sono inoltre date le densità per unità d'area dei segmenti rappresentativi della coscia (1), della gamba (3) e del piede (4)

*

+

*

+

*

+

?

Kg

Kg

Kg

$$1 = 70$$

$$?3 = 56,6$$

$$?4 = 61$$

.

m²

m²

m²

Per agevolare i calcoli semplifichiamo la geometria dei vari segmenti che compongono il modello. Useremo così un elemento trapezoidale per i

segmenti rappresentativi della coscia, della gamba e del piede come in figura.

 Image 717

 Image 718

 Image 719

 Image 720

 Image 721

6.5 Proprietà inerziali

203

d

1

2 - 3 = 0,05[m]

$h_0 = 0,27[m]$

d

1

3 - 4 = 0,04[m]

$h_1 = 0,15[m]$

0

3

$\alpha_1 = -45^\circ$

$h_0 = 0,15[m]$

0

3

$$2 = -90^\circ$$

$$h_1 = 0,09[\text{m}]$$

0

4

$$3 = +90^\circ$$

$$h_0 = 0,08[\text{m}]$$

L

4

$$1 = 0,45[\text{m}]$$

$$h_1 = 0,02[\text{m}]$$

$$L_3 = 0,45[\text{m}]$$

$$L_1 - 2 = 0,50[\text{m}]$$

$$L_4 = 0,30[\text{m}]$$

$$L_2 - 3 = 0,55[\text{m}]$$

Per ogni segmento devono essere calcolate le coordinate del baricentro e l'area corrispondente.

Ricordando che la coordinata del baricentro di un trapezio – che giace sul suo asse di simmetria – si calcola applicando la formula sotto riportata è possibile calcolare i baricentri gP_1 , gP_3 , gP_4 .

ih

g

$$0 + 2 \cdot ih1$$

$$\text{trap} = L1 \cdot$$

.

3

$$ih0 + ih0$$

 Image 722

 Image 723

7

Analisi delle forze

7.1 Forze interne ed esterne

Ricordiamo che le forze sono rappresentate, in un sistema Cartesiano, da vettori con tre componenti secondo gli assi coordinati. Le forze sono vettori applicati, è necessario in genere definirne il punto d'applicazione. Una distinzione fondamentale è quella tra forze interne ed esterne. Forze esterne sono quelle applicate al corpo da altri corpi, o da campi di forza esistenti nell'ambiente che si considera, ad esempio il campo della gravità, o un campo di forze elettromagnetiche. Forze interne sono invece quelle che agiscono all'interno del corpo, o tra corpi diversi di uno stesso sistema. Un caso notevole di forze interne è quello delle azioni elementari, agenti a livello atomico e molecolare, che garantiscono l'integrità e la continuità del corpo stesso. Consideriamo una barretta di sezione quadrata sottoposta a due forze esterne eguali agli estremi.

Immaginiamo ora di separare idealmente la barretta in due parti, per vedere "quello che accade dentro". Poiché la barretta è in equilibrio sotto l'azione delle due forze F uguali e opposte, anche le sue parti, ottenute dalla separazione ideale immaginata, saranno in equilibrio. Si deduce che, nella

sezione dove la separazione è stata ipotizzata sono presenti delle forze di coesione, che impediscono alla barretta di separarsi in due pezzi. Le forze F sulle due facce della sezione dovranno quindi essere uguali alle forze F esterne applicate. Le forze F sono forze interne perché agenti nella struttura interna del materiale, le F sono forze esterne, perché applicate attraverso l'azione di altri corpi o campi. Una designazione più precisa per le forze F è quella di "azioni interne". Le azioni interne sono quindi le risultanti delle azioni elementari di coesione che agiscono su ogni elemento infinitesimo della sezione. Chiamiamo *sforzo*, la forza riferita all'unità d'area. Nel caso presentato di sollecitazione a trazione, lo **Fig. 7.1**. Forze interne ed

esterne

Picasso B.: Fondamenti di Meccanica e Biomeccanica. Meccanica dei corpi rigidi articolati.

DOI 10.1007/978-88-470-2333-8_7, © Springer-Verlag Italia 2013

 Image 724

 Image 725

206

7 Analisi delle forze

sforzo nella sezione è dato dall'espressione:

$$\sigma = F$$

(7.1.1)

A

dove A è l'area della sezione retta. Un altro esempio di forze interne è quello delle azioni muscolari. Alle due estremità di un muscolo, se questo è libero ed ha un andamento rettilineo, insistono due forze eguali e di verso opposto. Nel corpo umano le forze muscolari devono essere considerate interne. Esse si presentano sempre in coppia. Se però la nostra analisi riguarda un singolo

segmento osseo, le forze muscolari sono da considerare esterne. È anche comune il caso che un muscolo non abbia andamento perfettamente rettilineo, come accade nel quadricipite distale, dove i quattro muscoli convergono nel tendine patellare, il cui andamento aggira l'articolazione del ginocchio prima di fissarsi sulla tibia prossimale. Una forza applicata ad un sistema libero può generare un'accelerazione lineare, se la forza passa per il baricentro, oppure un'accelerazione angolare ed una lineare, nel caso più generale. L'accelerazione angolare sarà tanto più elevata, quanto maggiore è il momento della forza rispetto al baricentro. Nei problemi statici e in quelli dinamici si presenta spesso il problema di ottenere, per un sistema di forze, la risultante e il momento risultante, rispetto ad un polo assegnato. Il problema può essere risolto ricorrendo alle operazioni sui vettori, presentate in Appendice. Chiamiamo trave un elemento strutturale nel quale una dimensione, è prevalente rispetto alle altre due. Nell'analisi statica la trave è l'elemento fondamentale, cui possono ricondursi molti elementi strutturali del nostro corpo, come i segmenti ossei dello scheletro. Supponiamo che la trave in Fig. 7.2 sia vincolata in modo isostatico, per mezzo di un appoggio semplice a sinistra e di una cerniera a destra. La trave è in equilibrio sotto l'azione della forza esterna, disegnata con linea continua e delle *reazioni vincolari*, cioè le forze trasmesse alla trave dai vincoli. Anche le reazioni vincolari devono essere considerate forze esterne, in quanto applicate alla trave dai vincoli, che sono comunque corpi esterni. Se trasportiamo al centro la forza applicata, otterremo una variazione delle reazioni vincolari. Infatti, spostando la forza verso il centro, le reazioni tendono ad assumere lo stesso valore, mentre se la spostiamo verso uno degli estremi, sarà la reazione in quell'estremo a prevalere.

Perché le reazioni restino invariate, occorre che la forza originaria, posta a sinistra sia sostituita da un sistema a essa equivalente, cioè un sistema che abbia risultante e momento risultante rispetto ad un polo qualsiasi, eguali a quelli della forza originaria.

Se prendiamo il punto A come polo il momento risultante della forza F è $-F * a$. Trasportando la forza a metà lunghezza il momento diventa $-F * L / 2$. Perché il momento risultante resti invariato, dopo lo spostamento della forza, occorre aggiungere come **Fig. 7.2**. Spostamento parallelo di una

forza

 Image 726

 Image 727

 Image 728

 Image 729

7.1 Forze interne ed esterne

207

Fig. 7.3. Diagramma

di corpo libero di una

trave

azione esterna una coppia di trasporto il cui momento sia opposto alla differenza dei momenti prima e dopo lo spostamento della forza $-(- F * L / 2 + F * a) = F(L / 2 - a)$.

Il sistema costituito dalla forza F nel centro della trave e dalla coppia aggiunta, ha la stessa risultante e lo stesso momento risultante, rispetto ad un polo arbitrario, della forza originaria.

Il regime statico di un corpo rigido non è alterato se una forza esterna viene trasportata parallelamente a se stessa, aggiungendo una coppia di trasporto il cui momento è eguale al prodotto del modulo della forza per lo spostamento.

Immaginando di sostituire i vincoli con le corrispondenti reazioni vincolari, vediamo che la trave è in equilibrio sotto l'azione del sistema complessivo di forze esterne e reazioni.

Lo schema grafico che rappresenta la trave sotto l'azione delle forze esterne e delle reazioni vincolari che hanno sostituito i vincoli, prende il nome di *diagramma di corpo libero*. Nell'analisi strutturale è uno strumento di uso corrente. Perché la trave sia in equilibrio, il sistema di forze costituito dalle

azioni esterne e dalle reazioni vincolari deve avere risultante nulla e momento risultante nulli, rispetto a un polo arbitrario. Nella Fig. 7.3 abbiamo rappresentato il diagramma di corpo libero della trave della Fig. 7.2. Assumendo il punto A come polo, le equazioni di equilibrio alla traslazione secondo Y e di momento sono:

$$R_A + R_B - F = 0$$

$$R_B l - F a = 0 .$$

(7.1.2)

Le due equazioni scritte portano facilmente alle reazioni vincolari incognite:

a

$$R_B = F l($$

)

$$R_A = F (1 - a / l) .$$

(7.1.3)

l

Se ora trasportiamo la forza F nel punto centrale della trave aggiungendo una coppia

\$

%

di trasporto C, di momento pari a M

l

$$C = F$$

- a , avente verso antiorario, la

2

 Image 730

 Image 731

 Image 732

 Image 733

208

7 Analisi delle forze

nuova situazione è quella rappresentata in Fig. 7.4. Scriviamo ancora le equazioni d'equilibrio, tenendo conto della nuova posizione della forza F e della coppia C .

Si ha:

$$R_A + R_B - F = 0$$

(

)

1

1

1

$$R_B l - F + M_C = R_B l - F + F$$

$$- a = R_B l - F a = 0 .$$

(7.1.4)

2

2

2

Le relazioni scritte coincidono con le equazioni precedenti e portano ovviamente allo stesso risultato per le reazioni vincolari.

Trasporto lungo la linea d'azione

Presentiamo un semplice esempio. Nella trave in Fig. 7.4 lo scorrimento della forza lungo la sua linea d'applicazione non cambia il regime statico (non cambiano, infatti, le equazioni di equilibrio delle forze e dei momenti). È però evidente che cambia l'effetto della forza sulla trave. Infatti, se la forza è applicata in basso, il tratto verticale della trave risulta scarico, mentre se la forza è in alto, esso risulta compresso.

Possiamo quindi dire che:

Il regime statico di un sistema non cambia se una o più forze sono traslate lungo la loro linea d'azione. Cambia invece l'effetto delle forze sul corpo, considerato come sistema deformabile.

Fig. 7.4. Trasporto di una forza lungo la sua linea d'azione

Determinazione delle risultanti e del momento risultante di un sistema di forze

In conformità a quanto è stato detto, si conclude che:

Qualunque sistema di forze può essere trasformato, con operazioni di trasporto, in un sistema equivalente. La composizione con operazioni di somma vettoriale delle forze agenti e dei momenti delle forze e coppie applicate, rispetto ad un polo qualunque, porta a due azioni risultanti, la forza risultante e il momento risultante rispetto al polo assunto. Queste entità sono, per quanto riguarda l'equilibrio o il moto del corpo rigido a cui sono applicate, del tutto equivalenti al sistema di forze e coppie originarie.

 Image 734



7.1 Forze interne ed esterne

209

Fig. 7.5. Costruzione grafica del poligono delle forze

Determinazione della risultante

Le procedure per la determinazione della risultante sono diverse per forze concorrenti, parallele o sghembe. Nel caso di più forze concorrenti, giacenti o meno nello stesso piano, è sufficiente sommare i vettori che le rappresentano ed applicare il vettore somma (risultante) nel punto d'intersezione delle linee d'azione. Graficamente, nel caso tutte le forze giacciono in un piano, si può costruire il poligono delle forze trasportando parallelamente tutti i vettori che le rappresentano, uno di seguito all'altro e tracciando la congiungente il punto d'inizio col punto finale della spezzata ottenuta. Nell'esempio della Fig. 7.5 abbiamo tre forze concorrenti in un punto e la risultante viene costruita come prima descritto. Se le forze sono parallele e le loro linee d'azione giacciono in un piano si vedano i richiami forniti sui vettori all'inizio di questo testo. Per trovare graficamente la retta d'azione della risultante nel caso di forze parallele o concorrenti nel piano, si può ricorrere alla costruzione del *poligono funicolare*.

La costruzione consiste nel riportare tutte le forze in scala nel foglio da disegno.

Si costruisce quindi il poligono delle forze, trasportando le forze parallelamente a se stesse, in successione. Si trova quindi la risultante, il cui modulo deve essere letto nella stessa scala assunta per rappresentare le forze. Si tracciano le congiungenti tra un polo, scelto arbitrariamente, con i vertici del poligono delle forze. Si tracciano, nel piano delle forze, le parallele alle congiungenti I,II,III,IV,V, sino ad incontrare le linee d'azione delle forze F_1, \dots, F_5 . L'intersezione tra il primo e l'ultimo lato fornisce un punto della retta d'azione della risultante. È facile vedere che il poligono funicolare rappresentato dalla successione dei tratti I , II , III , IV , V può essere visto

come la deformata di una fune flessibile, da qui il nome, soggetta ai carichi dati.

Fig. 7.6. Il poligono funicolare

Image 736

210

7 Analisi delle forze

Un sistema di forze distribuite nello spazio e sghembe, non può essere ricondotto ad un'unica forza risultante ma ad una risultante più una coppia risultante, come mostra l'Esempio 7.1.

Esempio 7.1. Si considerino tre forze rappresentate dai vettori:

$\{ \}$

$\{ \}$

$\{ \}$

$\{ 1 \}$

$\{ 0 \}$

$\{ 4 \}$

$$\mathbf{F}_1 = [2] \quad \mathbf{F}_2 = [2] \quad \mathbf{F}_3 = [5r]$$

0

2

0

applicate nei tre punti:

$\{ \}$ $\{ \}$ $\{ \}$ $\{0, 5\}$ $\{1\}$ $\{0, 5\}$ $\mathbf{P1} = [0] \quad \mathbf{P2} = [0, 3] \quad \mathbf{P3} = [0, 5] .$

0

1

2, 5

La risultante delle tre forze è il vettore:

 $\{ \} \{ \} \{ \} \{ \}$ $\{1\} \{0\} \{4\} \{5\}$ $\mathbf{F1} + \mathbf{F2} + \mathbf{F3} =$

+

+

=

=

 $[2] \ [2] \ [5] \ [9] \ \mathbf{R} .$

0

2

0

2

Se pensiamo di applicare il vettore risultante nell'origine dovremmo aggiungere una coppia il cui momento sia pari alla somma dei momenti delle tre forze rispetto all'origine, cioè:

$$\mathbf{MR} = \mathbf{P1} \times \mathbf{F1} + \mathbf{P2} \times \mathbf{F2} + \mathbf{P3} \times \mathbf{F3} =$$

$$\begin{bmatrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{bmatrix}$$

$$\{0,5\} \{1\} \{1\} \{4\} \{0,5\} \{0\}$$

=

+

×

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2,5 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0,3 \\ 5 \\ 0,5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2,5 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0,3 \\ 5 \\ 0,5 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

0

0

1

0

2,5

2

$$\begin{bmatrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{bmatrix}$$

$$\{0\} \{-5\} \{-4\} \{-9\}$$

=

-

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} .$$

1

3, 8

1

5, 8

Il sistema originario è quindi equivalente ad una forza pari a \mathbf{R} , applicata nell'origine e ad una coppia il cui momento, considerato come vettore con direzione perpendicolare al piano della coppia, ha le componenti di \mathbf{MR} .

Fig. 7.7. Forze sghembe

 Image 737

 Image 738

 Image 739

7.2 Forze d'attrito

211

7.2 Forze d'attrito

Questo tipo di forze si sviluppa quando due corpi entrano in contatto con strisciamento relativo. La presenza di asperità superficiali, anche nelle superfici che ad occhio nudo appaiono più levigate, asperità misurabili attraverso il rilievo micrometrico delle superfici, fa nascere, nello strisciamento relativo, forze che dipendono dalla natura chimica dei materiali, dalla natura fisica (superfici secche o lubrificate) e dalla pressione normale esistente tra le superfici stesse. Secondo il modello di Coulomb, le

forze tangenziali d'attrito sono, in modo approssimato, indipendenti dalla velocità dello strisciamento relativo. La forza tangenziale d'attrito è uguale alla componente normale, la forza cioè che preme i due corpi l'uno contro l'altro, moltiplicata per il coefficiente d'attrito tra le due superfici. Si ha cioè:

$$T = fN .$$

(7.2.1)

Misure accurate hanno dimostrato che il coefficiente d'attrito di primo distacco, quello cioè che si manifesta quando inizia lo strisciamento relativo, è superiore al coefficiente d'attrito durante lo strisciamento. Per questo il coefficiente d'attrito di primo distacco viene in genere indicato con il simbolo f_a .

Consideriamo un blocco di peso P e altezza h , Fig. 7.8 che poggia su un piano.

Ad esso sia applicata a metà altezza un a forza orizzontale F . Se il corpo è fermo o in moto uniforme, il sistema di forze presente è in equilibrio. Si possono quindi scrivere le relazioni d'equilibrio alla traslazione secondo X , Y ed alla rotazione intorno ad un asse Z perpendicolare al piano del moto, passante per un polo arbitrario.

h

$$P - N = 0$$

$$F - T = 0$$

F

$$= 0 .$$

(7.2.2)

2

Se prendiamo come polo per il calcolo dei momenti il punto medio della base del blocco per cui passano (o pensiamo che passino) le rette d'azione delle forze N , T , P , queste forze hanno momento nullo rispetto a quel polo e il momento risultante è uguale a $Fh/2$, diverso da zero. Qualcuna delle nostre ipotesi sulle forze è quindi da rivedere.

Se la reazione del suolo si spostasse in avanti rispetto alla direzione del moto di una quantità u , le nuove equazioni di equilibrio rispetto allo stesso polo sarebbero: h

$$P - N = 0$$

$$F - T = 0$$

$$F - Nu = 0 .$$

(7.2.3)

2

Fig. 7.8. Forze d'attrito

 Image 740

 Image 741

212

7 Analisi delle forze

Fig. 7.9. La reazione del suolo si sposta avanti

Fig. 7.10. Piano inclinato

Come è stato dimostrato con misure del campo di pressione tra il blocco e la superficie di supporto, la distribuzione delle pressioni di contatto diventa effettivamente tale per cui la risultante N non passerà più per il punto di mezzo del lato di base, ma sarà spostata in avanti. In Fig. 7.10 viene

rappresentata in modo schematico la distribuzione asimmetrica della pressione di contatto.

Piano inclinato

Si consideri un blocco su un piano inclinato, Fig. 7.10, e si voglia sapere per quale inclinazione ha inizio il moto e come questo s'instauri.

Perché possa iniziare lo scorrimento, la componente delle azioni esterne lungo il piano inclinato deve essere uguale o maggiore delle resistenze d'attrito. Per la condizione di inizio dello strisciamento si ha:

$$P \cos \theta - N = 0$$

$$P \sin \theta - T = 0$$

$$T = f_a N .$$

(7.2.4)

Da cui $\tan \theta = T / N = f_a$ cioè $\theta = L_a$.

$L_a = \text{atan}(f_a)$ prende il nome di angolo di aderenza, $L = \text{atan}(f)$ è l'angolo di attrito. Si conclude che, perché il moto possa instaurarsi, l'inclinazione del piano inclinato deve essere uguale o maggiore dell'angolo di aderenza. Questa proprietà suggerisce un metodo per la misura del coefficiente d'aderenza e d'attrito.

Esempio 7.2. Lo sciatore nell'impianto di risalita è soggetto ad un sistema di forze equilibrato (si ammette che lo sciatore stia salendo a velocità costante sul pendio). Si scriveranno le equazioni di equilibrio alla traslazione nella direzione X del pendio e nella direzione Y, a questo normale. L'equilibrio dei momenti sarà espresso rispetto

 Image 742

 Image 743

 Image 744

 Image 745

7.3 Attrito volvente

213

Fig. 7.11. Sciatore su un piano

inclinato

al baricentro del corpo dello sciatore. Si ha:

$$F \cos \alpha - T - P \sin \theta = 0$$

$$N + F \sin \alpha - P \cos \theta = 0$$

$$Nu - Tb = 0$$

$$T = fN .$$

(7.2.5)

Si tratta di quattro equazioni nelle quattro incognite F, T, N, u . Con semplici passaggi si ottiene:

$$u = fb$$

$$F = P(\sin \theta + f \cos \theta)$$

$$\cos \alpha + f \sin \alpha$$

$$T = P(\sin \theta + f \cos \theta)$$

$$\cos \alpha + f \sin \alpha \cos \alpha + P \sin \theta$$

$$N = P \cos \theta - P(\sin \theta + f \cos \theta)$$

$$\cos \alpha + f \sin \alpha \sin \alpha .$$

(7.2.6)

7.3 Attrito volvente

Se un disco rotola senza strisciare su un piano sotto l'azione di una forza orizzontale applicata nel suo centro, in condizioni di moto uniforme devono essere soddisfatte le equazioni d'equilibrio alla traslazione e alla rotazione.

Le equazioni sono: $F - T = 0$

$$N - P = 0$$

$$Tr = 0 .$$

(7.3.1)

La terza equazione di momento non può essere soddisfatta se non con $T = 0$, cosa incompatibile con la prima equazione. Si assume quindi che la distribuzione di pressione sulla piccola area di contatto tra il disco e il piano d'appoggio sia asimmetrica

 Image 746

 Image 747

 Image 748

214

7 Analisi delle forze

Fig. 7.12. Attrito volvente

Fig. 7.13. Attrito volvente

e ammetta una risultante, spostata in avanti rispetto alla posizione teorica del punto di contatto. Nella situazione della Fig. 7.13 si ha allora:

$$F - T = 0$$

$$N - P = 0$$

$$Tr - Nu = 0 .$$

(7.3.2)

La forza T costituisce quindi una resistenza al rotolamento. La sua espressione: $T = u N = f_v N$.

(7.3.3)

r

Permette di definire la resistenza al rotolamento attraverso il coefficiente d'attrito volvente f_v , eguale al quoziente tra il parametro d'attrito volvente u e il raggio del disco. La formula (7.3.3) si presenta quindi come formalmente analoga a quella scritta per l'attrito radente.

7.4 Forze viscosse

Forze viscosse si manifestano quando un corpo si muove all'interno di un fluido e tra strati contigui di un fluido. Si consideri una piastra rettangolare in movimento all'interno di un condotto occupato da un fluido in quiete. È naturale pensare che le

 Image 749

 Image 750

 Image 751

 Image 752

 Image 753

7.4 Forze viscosse

215

Fig. 7.14. Azioni viscosse

in un condotto

particelle del fluido aderenti alla superficie della piastra vengano trascinate da questa in movimento con la stessa velocità, a causa dei fenomeni di adesione. Questo effetto di trascinamento è sentito da tutti gli strati di fluido sovrastanti e sottostanti alla piastra, in modo sempre più debole quanto più ci si allontana dalla piastra stessa.

Se consideriamo un generico strato fluido di spessore infinitesimo, sotto la piastra, i punti della faccia superiore subiranno maggiormente l'effetto di trascinamento degli strati più veloci, ed avranno quindi una velocità superiore ai punti della faccia inferiore, ritardati dagli strati più lenti sottostanti. A partire dalla superficie del corpo sino alla parete inferiore del condotto la velocità degli strati diminuisce sino al valore zero in corrispondenza della parete stessa. Per gli effetti di trascinamento accennati, sulle due facce dello strato nascono degli sforzi tangenziali (forze per unità di superficie) che hanno la direzione rappresentata in Fig. 7.14 e valori proporzionali, attraverso il coefficiente η , al tasso di variazione della velocità nella direzione normale al moto.

In altre parole:

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

(7.4.1)

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

in cui η è la viscosità dinamica del fluido, che nel SI si misura in kg/(ms) e v la velocità delle particelle fluide. L'unità del sistema SI è troppo grande per i valori di viscosità che si incontrano nella pratica. Per questo si impiega l'unità del sistema CGS [g/(cm * s)] che è denominata Poise [P], o più spesso i suoi sottomultipli, cP

e mP. Riprendendo l'esempio precedente della Fig. 7.14, le particelle del fluido a contatto con la piastra mobile ne verranno trascinate per adesione e assumeranno la stessa velocità V di questa. Quelle a contatto col fondo

resteranno ferme, perché aderenti ad una parete immobile. Se ammettiamo che la variazione di velocità del fluido secondo y sia lineare si ha:

∂

$$A = \eta \frac{dv}{dy} = \eta V \frac{1}{h}$$

∂

(7.4.2)

y

h

Lo sforzo A , nell'ipotesi fatta, non dipende dalla coordinata y del punto considerato.

La resistenza opposta dal fluido all'avanzamento si ottiene integrando, sulle due facce del corpo a contatto col fluido lo sforzo A , ponendo cioè:

$$R = 2AA = 2\eta AV \frac{1}{h}$$

(7.4.3)

h

Nella pratica le unità di viscosità descritte sono impiegate raramente, lasciando il posto ad unità empiriche, basate sul tempo di deflusso attraverso piccoli orifizi. Di questo tipo sono le indicazioni di viscosità che si trovano sulle confezioni degli olii lubrificanti.

 Image 754

 Image 755

 Image 756

 Image 757

 Image 758

 Image 759

 Image 760

 Image 761

 Image 762

 Image 763

 Image 764

 Image 765

 Image 766

216

7 Analisi delle forze

7.5 Viscosità cinematica

Si definisce viscosità cinematica il rapporto tra viscosità dinamica e densità
 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$;?.

L'unità di viscosità cinematica nel sistema internazionale è $\text{kg m}^{-3} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.
Anche per la ms kg

s

viscosità cinematica l'unità del sistema SI è eccessiva per gli scopi pratici e si ricorre normalmente all'unità corrispondente del sistema CGS, lo Stokes
 $\text{cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$ e ai s

s

suoi sottomultipli cS e mS. La viscosità cinematica dell'acqua è 1 cS a 20 ° C, quella dell'aria 13,2 cS, sempre a 20 ° C, quella degli oli lubrificanti varia

tra 50 e 200 cS.

L'acqua non è quindi un buon lubrificante.

Esempio 7.3. Si consideri un cilindro rotante con velocità angolare F all'interno di un recipiente contenente un fluido viscoso. Si voglia determinare la coppia necessaria per far ruotare il cilindro con velocità costante, vincendo le resistenze viscosse agenti sulle superfici del cilindro in moto relativo rispetto al fluido. Poniamo la distanza tra la superficie laterale del cilindro e la parete fissa uguale a t e quella tra le basi del cilindro e i fondi del recipiente uguale a s . Per calcolare il momento da applicare all'asse del cilindro per vincere le resistenze viscosse, si pensi che sulla superficie cilindrica agiscono, nel caso in cui si possa ritenere valida la legge di variazione lineare della velocità del fluido trascinato dal cilindro, tensioni il cui valore è dato da:

;

$$A = V$$

con

$$V = FR1$$

t

per i fondi gli sforzi viscosi valgono:

;

$$A$$

v

$$1 =$$

con

$$v = Fr$$

s

questi sforzi sono variabili in quanto la velocità dei punti del fondo del cilindro è proporzionale alla loro distanza dall'asse di rotazione. Integrando su tutta la superficie del rotore, fondi e superficie cilindrica, i momenti degli sforzi A e A1 rispetto all'asse di rotazione si ottiene:

R1

" Fr

$$C = \int_0^R F r^2 dr = \frac{F}{3} R^3 h + \frac{F}{4} R^4 \cdot$$

$$\int_0^R r^2 dr = \frac{1}{3} R^3 h + \frac{1}{4} R^4 \cdot$$

t

s

2t

s

0

Con il primo termine riferito alla superficie cilindrica, il secondo ai fondi.

Fig. 7.15. Rotazione di un rotore all'interno

di un serbatoio cilindrico

 Image 767

 Image 768

 Image 769

 Image 770

 Image 771

 Image 772

 Image 773

 Image 774

 Image 775

 Image 776

7.6 Forze elastiche

217

7.6 Forze elastiche

Sono forze dovute alla presenza di elementi elastici di qualunque tipo. La molla è l'elemento elastico più semplice. Una molla a caratteristica lineare esercita, se deformata, una forza di reazione proporzionale alla sua variazione di lunghezza.

$$F = k!x .$$

(7.6.1)

La costante k , che rappresenta il rapporto tra la forza applicata e l'allungamento, prende il nome di rigidità. È opportuno osservare che la morfologia dell'elemento elastico può essere molto diversa da quella rappresentata convenzionalmente. Si pensi alle molle che sono inserite nel bilanciere degli orologi, alle molle a balestra nelle sospensioni delle auto, alle molle usate nell'imbottitura dei sedili ed a tutti gli altri elementi elastici di varia forma, materiale e struttura. La relazione tra forza ed allungamento per una molla lineare è rappresentata, in un diagramma Cartesiano, da un segmento rettilineo.

Due molle di rigidità diversa, in parallelo, hanno ai loro estremi lo stesso allungamento, mentre le forze elastiche generate dalla deformazione, uguale per ambedue le molle, si sommano. per cui si ha:

$$F = (k_1 + k_2)x$$

$$K = k_1 + k_2 .$$

(7.6.2)

Due molle in parallelo hanno una rigidità complessiva pari alla somma delle singole rigidità. Due o più molle in serie hanno lo stesso valore di forza ai loro estremi, come si può vedere isolando una singola molla e tracciando il diagramma di corpo libero. Quindi le molle sono soggette alla stessa tensione, mentre le deformazioni si sommano:

!

1

$$x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = F + F = F$$

$$+ 1 = F$$

k_1

k_2

k_1

k_2

K

$$1 = 1 + 1$$

$$K = k_1 k_2 .$$

(7.6.3)

K

k_1

k_2

$k_1 + k_2$

In un sistema di molle in serie l'inverso della rigidità del sistema complessivo, che prende il nome di cedevolezza, è uguale alla somma delle cedevolezza delle singole molle.

Fig. 7.16. Combinazione di molle: a) in parallelo; b) in serie

Image 777

Image 778

218

7 Analisi delle forze

Fig. 7.17. Caratteristica di una molla elastica

Lavoro di deformazione di una molla elastica

Se una molla a comportamento lineare viene deformata progressivamente, aumentando gradualmente la forza applicata sino ad un valore massimo F_0 , il diagramma forza-allungamento ha l'andamento della Fig. 7.17.

L'area sottostante alla caratteristica forze allungamenti rappresenta il lavoro speso dall'esterno per la deformazione della molla, se il senso di percorrenza della linea è verso le deformazioni crescenti, il lavoro elastico restituito dalla molla quando questa torna alla situazione di partenza, se la linea viene percorsa in discesa. Si ha infatti: x_0

"

$L =$

$kx dx = \frac{1}{2} kx^2$,

2

0

0

che rappresenta proprio l'area del triangolo di base x_0 e altezza kx_0 .

7.7 Corpi in movimento entro un fluido

L'esperienza ci mostra che un corpo in movimento all'interno di un fluido è soggetto ad una forza resistente che dipende dalla forma del corpo, dalla natura della superficie di contatto tra corpo e fluido e infine dalle proprietà fisiche del fluido. La forza resistente è dovuta a due cause principali, l'attrito tra i filetti fluidi dovuto alla viscosità e quello dovuto alla perturbazione indotta nel fluido dal passaggio del corpo. Le due componenti di resistenza prendono il nome di resistenza d'attrito e resistenza di forma.

Assumendo un sistema di riferimento solidale al corpo osserviamo che le forze elementari agenti sulle particelle fluide nel loro moto sono di due tipi:

-

Forze tangenziali dovute alla viscosità nel moto relativo di filetti fluidi che lambiscono un corpo fermo o di filetti fluidi che scorrono mutuamente con diversa velocità. L'espressione generale di queste forze è quella data dalle (7.4.2) e (7.4.3).

-

Forze d'inerzia dovute al cambiamento di velocità delle particelle fluide, per esempi

quando percorrono traiettorie curve o sono comunque costrette ad accelerare o decelerare.

 Image 779

 Image 780

 Image 781

7.7 Corpi in movimento entro un fluido

219

Fig. 7.18. Moto di un corpo en-

tro un fluido: a) fluido ideale;

b) fluido reale

a) b)

Un indice dell'importanza relativa delle forze viscosi e delle forze d'inerzia in un flusso è il numero di Reynolds, la cui espressione è:

$Re = \frac{\rho v d}{\mu}$

.

;

(7.7.1)

I valori del numero di Reynolds permettono di valutare se un flusso è di tipo laminare, nel quale tutti i filetti fluidi che costituiscono il campo di moto, rimangono sempre paralleli a sé stessi, senza mai mescolarsi, come tante piccole lamine, o turbolento, nel quale i fenomeni inerziali, come i vortici, hanno la meglio sui fenomeni viscosi (che tendono a mantenere tutto parallelo), e svolgono un'azione di mescolamento dei filetti fluidi, rompendone l'originario parallelismo. In questo caso la situazione è quella della Fig. 7.18b.

Abbiamo visto in precedenza che la resistenza d'attrito è dovuta al fatto che le particelle di fluido a contatto col corpo tendono per adesione a diventare solidali a questo, assumendone la velocità, le particelle più lontane sono invece meno influenzate dai fenomeni di adesione. All'interno di uno strato di piccola spessore in vicinanza della superficie del corpo, che prende il

nome di *strato limite di quantità di moto*, la velocità varia dal valore corrispondente alla velocità del corpo al valore asintotico delle particelle fluide non perturbate.

Lo strato limite può essere di tipo *laminare*, nel quale i filetti fluidi sono lamine che seguono il contorno del corpo, oppure *turbolento* dove i filetti di fluido seguono linee intricate. Lo strato limite può transitare da laminare a turbolento attraverso una zona detta *regione di transizione*, ma non potrà mai tornare spontaneamente laminare.

La transizione da laminare a turbolento viene favorita dall'aumentare della velocità, dalla rugosità superficiale del corpo e dalla forma meno affusolata del corpo.

La resistenza di forma è anch'essa influenzata dalla viscosità a causa del meccanismo della separazione delle linee di flusso. Per il calcolo delle azioni mutue tra corpo e fluido è indifferente che si tratti di un corpo in moto entro un fluido fermo o di una corrente fluida che investe un corpo immobile. Quello che conta è la velocità relativa tra corpo e fluido. Ammettendo per semplicità di trattazione che il corpo sia fermo all'interno di un flusso uniforme, osserviamo l'andamento dei filetti fluidi rappresentato nella Fig. 7.18. Se il fluido fosse ideale, cioè avesse densità costante e viscosità nulla, l'andamento, per modesti valori del numero di Reynolds, sarebbe quello della Fig. 7.18a. Le linee di flusso e le pressioni presentano un andamento simmetrico a monte e a valle del corpo. Questo implica che anche le pressioni siano simmetriche e complessivamente le azioni sul corpo sono equilibrate. In altre parole il fluido non esercita alcuna azione sul corpo, o, se consideriamo il corpo mobile invece del fluido, il corpo avanza senza incontrare alcuna resistenza. Questa conclusione, contraria all'esperienza, è il cosiddetto "paradosso di d'Alembert".

 Image 782

 Image 783

Per un fluido reale le cose vanno diversamente. Anche nell'ipotesi che il flusso si presenti ancora come nella Fig. 7.18a, cioè per bassi valori del numero di Reynolds, la velocità delle particelle fluide a valle non sarebbe uguale a quella delle particelle a monte, a causa degli effetti frenanti che su queste esercitano le azioni viscosse. Infatti le particelle che passano vicino alla superficie del corpo tendono ad assumere la velocità di questo, nulla.

Le particelle più lontane, all'interno dello strato limite, vengono comunque rallentate dalle prime. A valle del corpo la velocità media delle particelle sarà ridotta a causa dell'azione frenante dovuta alle forze viscosse. George Stokes, nel 1845, prendendo in considerazione il moto laminare di una corrente che investe una sfera trovò che la forza scambiata risponde all'espressione:

$$R = -6\eta rv .$$

(7.7.2)

Nella quale R è la resistenza, η la viscosità del fluido, r il raggio della sfera. La formula può essere applicata a molte situazioni, ad esempio nei moti di caduta delle particelle d'acqua nell'atmosfera, con un semplice cambiamento della costante. In conclusione la resistenza d'attrito non è nulla e dipende dalla viscosità, che lo strato limite sia laminare o turbolento, caso nel quale non potremo più impiegare la (7.7.2).

Prima di analizzare la resistenza di forma, prendiamo in considerazione una particolare versione del teorema di conservazione dell'energia, dovuta a Bernoulli. Enunciata semplicemente, la legge di Bernoulli dice che l'energia totale posseduta dall'unità di massa del fluido è la somma della sua energia potenziale di posizione, calcolabile in base alla quota del baricentro della porzione di fluido esaminata rispetto ad una quota di riferimento, dell'energia potenziale dovuta alla sua pressione e della sua energia cinetica. Si ha quindi:

$$E = gh + p + v^2 .$$

?

(7.7.3)

Essendo ρ la massa specifica del fluido, v la velocità, E l'energia totale posseduta dall'unità di massa. Se assumiamo che non ci sia per le particelle fluide variazione dell'energia potenziale di posizione nel passare da monte a valle del corpo, il primo termine al secondo membro della (7.7.3) può essere considerato nullo, assumendo che la quota di riferimento sia appunto quella a cui si trova il fluido.

Osservando gli altri due termini si intuisce che, essendo l'energia totale costante, se la velocità del fluido aumenta, la sua pressione diminuisce. Questo infatti avviene quando le particelle fluide passano al disopra o al disotto del corpo. Anche se non esiste alcun contenimento fisico del flusso la situazione è, grosso modo, quella di un condotto parzialmente ostruito da un corpo al suo interno.

Abbiamo detto in precedenza che un fluido ideale in moto laminare presenta un andamento simmetrico delle linee di flusso e delle pressioni.

In un fluido reale le particelle fluide sono soggette a due azioni contrastanti. Le forze d'inerzia tenderebbero a contrastare il cambiamento di direzione e di modulo della velocità imposto dalla presenza del corpo. Le forze di pressione e d'adesione tenderebbero a favorire questo cambiamento. Se, per elevati valori del numero di

 Image 784

 Image 785

 Image 786

7.7 Corpi in movimento entro un fluido

221

Reynolds, prevale l'effetto delle forze d'inerzia, i filetti fluidi si staccano dal profilo del corpo, formando una zona di ricircolazione. A valle del corpo nasce una scia vorticoso. Poiché la zona di ricircolazione resta aderente al

corpo la zona di passaggio per il fluido immediatamente a valle del corpo, si restringe e la velocità aumenta.

Da questo deriva che la risultante delle pressioni a monte è superiore a quella delle pressioni a valle. La differenza tra queste due azioni costituisce la resistenza applicata dal fluido. La resistenza diventa proporzionale al quadrato della velocità e non più alla prima potenza di questa, come nella (7.7.2), secondo l'espressione: 1

$$R = c_R \rho v^2 A .$$

(7.7.4)

2

Nella quale R è la resistenza, ρ la massa specifica del fluido, v la velocità del fluido (o del corpo secondo il sistema di riferimento adottato), A l'area di una sezione caratteristica del corpo, tipicamente l'area della sezione retta, c_R il coefficiente di resistenza, indice delle proprietà fluidodinamiche. Nel caso dei profili aerodinamici e idrodinamici, la forza globale esercitata dal fluido sul profilo si divide in due componenti, una resistente R , agente in senso opposto al moto relativo ed una di portanza P , la cui direzione è normale a quella del moto. L'espressione della portanza è analoga a quella della resistenza:

1

$$R = c_P \rho v^2 A .$$

(7.7.5)

2

Senza voler entrare in difficili trattazioni di aerodinamica, osserviamo la Fig. 7.19.

I filetti fluidi che passano sopra il profilo dovranno compiere un cammino più lungo di quelli che passano sotto. Questo significa che la velocità dei filetti fluidi passanti al disopra sarà maggiore di quella dei filetti che passano

al disotto. Per il principio di Bernoulli le pressioni sulla parte inferiore del profilo saranno superiori a quelle sulla parte superiore. La risultante delle forze di pressione nella direzione normale al moto sarà quindi una forza di portanza che, per incidenze non troppo alte sarà molto maggiore della forza resistente. La Fig. 7.19 mostra la distribuzione delle pressioni su **Fig. 7.19.** Profili aerodinamici: a) andamento del flusso che investe un profilo alare (Wikimedia Creative Commons); b) distribuzione delle pressioni su un tipico profilo aerodinamico con incidenza positiva

 Image 787

222

7 Analisi delle forze

Fig. 7.20. Coefficienti di por-

tanza e resistenza per un ti-

pico profilo alare, in funzione

dell'angolo d'incidenza (Wiki-

media Creative Commons)

un tipico profilo aerodinamico. Sia il bordo superiore del profilo che quello inferiore sono soggetti a pressioni inferiori a quella della corrente fluida lontana dal profilo.

La risultante delle due forze verticali derivanti dall'integrazione delle forze elementari di pressione sul bordo inferiore e superiore del profilo, è la portanza. L'integrale delle componenti orizzontali di pressione è la resistenza. Nel profilo esiste un punto chiamato centro di pressione rispetto al quale il momento risultante di tutte le azioni aerodinamiche è nullo. Il diagramma della Fig. 7.20 riporta i valori dei coefficienti di portanza e resistenza per un tipico profilo aerodinamico, in aria, in funzione dell'incidenza. È ben noto che aumentando l'incidenza del profilo si ottiene un incremento della portanza e più limitatamente, della resistenza. Tuttavia, oltre un certo limite di incidenza, si verifica il fenomeno dello stallo, che

corrisponde al distacco dei filetti fluidi dalla superficie del profilo, con una brusca riduzione della portanza ed un forte incremento della resistenza.

Effetto Magnus

Se una sfera o un cilindro trasla in seno ad un fluido con velocità V e ruota nello stesso tempo intorno al proprio asse con velocità angolare F , i filetti fluidi prossimi alla superficie della sfera sono da questa trascinati in rotazione. Adottando un sistema di riferimento solidale alla palla, cioè considerando il fluido in movimento e non la palla stessa, in prossimità della superficie della palla la velocità relativa dei filetti fluidi aumenterà nelle zone in cui la velocità dovuta alla traslazione si somma a quella di rotazione e diminuirà quando le due componenti hanno segno opposto. Nel caso della figura la velocità del fluido relativa al pallone ha verso opposto a quella del pallone, quindi crescerà nei filetti fluidi che passano sopra la sfera e decrescerà per quelli che passano sotto. Ricordando il teorema di Bernoulli, in alto si formerà una zona di pressione minore di quella asintotica, lontano cioè dalla sfera in movimen-

 Image 788

7.7 Corpi in movimento entro un fluido

223

P

P

ω

V

Fig. 7.21. Effetto Magnus. La portanza è generata dalla rotazione del pallone, ne deriva una traiettoria curva

to, in basso una pressione più alta di quella asintotica. La risultante delle pressioni agenti sulla sfera, sarà quindi una forza di portanza P che produrrà una deviazione della traiettoria dall'andamento rettilineo. Nel gioco del

pallone e nel tennis l'effetto Magnus, comunemente chiamato "effetto" o "spin", viene in genere sfruttato per imprimere alla palla o alla pallina traiettorie difficilmente prevedibili e controllabili.

L'effetto può essere sfruttato sia con rotazioni impresse nel piano orizzontale, che nel piano verticale. Nel calcio l'effetto si ottiene colpendo la palla eccentricamente. Nel tennis certi tipi di effetto volti ad imprimere una rotazione nel piano verticale, provocano, al rimbalzo, effetti di accelerazione o decelerazione che rendono la risposta più difficile.

Esempio 7.4. Si voglia calcolare la velocità di un paracadutista in caduta libera, dopo il lancio. All'uscita dal velivolo il paracadutista possiede una velocità con direzione orizzontale, uguale a quella dell'aereo. Questa componente si annulla rapidamente dopo l'uscita dal velivolo, a causa della resistenza dell'aria. Trascurando il moto orizzontale, si voglia studiare l'andamento della componente verticale. Questa cresce a causa del campo della forza di gravità, sino a raggiungere un valore limite, nel quale la resistenza dell'aria equilibra il peso del paracadutista e questo cade, con velocità costante, sino all'apertura del paracadute. La conclusione precedente è approssimata in quanto non tiene conto della variazione di densità dell'aria con la quota. Il calcolo richiede la valutazione del coefficiente di resistenza, dato in funzione del numero di Reynolds, che a sua volta dipende dalla velocità. È necessaria quindi una serie di iterazioni, partendo da un valore ipotizzato della velocità e verificandolo con il calcolo successivo. Per avere un primo ordine di grandezza si assumerà una velocità di caduta pari a 250 km/h, corrispondente a 70 m/s. Per questa velocità si ha:

 Image 789

 Image 790

 Image 791

 Image 792

 Image 793

 Image 794

 Image 795

224

7 Analisi delle forze

$$Re = 70 * 1,8 = 9 * 10^6 c$$

$$13,2 * 10^{-6}$$

$R = 0,3$. Si ottiene allora:

$$R = 0,3 * 1,27 * v^2 * 1,8 * 0,35 = 70 * 9,81$$

2

-

$$2 * 70 * 9,81$$

m

v =

$$= 75,64.$$

$$0,3 * 1,27 * 1,8 * 0,35$$

s

Nel calcolo precedente si è assunta una massa del paracadutista di 70 kg e una densità dell'aria di 1,27 kg/m³. Si è inoltre supposto che il paracadutista presenti una sezione frontale pari all'area di un rettangolo di base 0,35 m e altezza 1,8 m. Il valore ottenuto è assai vicino a quello stimato.

Naturalmente la velocità di caduta è fortemente dipendente dall'assetto e sarà minima quando il paracadutista offre all'aria il massimo della superficie frontale.

7.8 Azioni di un fluido su un corpo solido

Quando un corpo entra in contatto con un fluido in moto, scambia con esso delle forze, la cui entità dipende dalla variazione che la presenza del corpo provoca nella quantità di moto del fluido. Queste azioni sono presenti ad esempio nelle turbomacchine e in tutti i sistemi in cui un fluido interagisce con corpi solidi. Prima di presentare la discussione su questo tipo di azioni, richiamiamo il secondo principio della dinamica, **Fig. 7.22**. Azione di un fluido in movimento su un corpo

Fig. 7.23. Propulsione dei pesci



7.8 Azioni di un fluido su un corpo solido

225

secondo il quale la risultante delle forze agenti su un corpo è eguale alla derivata temporale della sua quantità di moto, vedi il Par 9.2.

$$\Sigma$$

$$d\mathbf{v}$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{M}$$

$$= d\mathbf{Q} .$$

(7.8.1)

$$dt$$

$$dt$$

Supponiamo che il corpo rappresentato in Fig. 7.21, costituito da una lastra curva, sia investito da un getto fluido di portata q che entri a sinistra con velocità \mathbf{v}_1 ed esca con velocità \mathbf{v}_2 . Se, nell'unità di tempo, la quantità di moto che entra nel volume di riferimento, delimitato dall'aerea tratteggiata,

vale qv_1 , e quella in uscita qv_2 , la variazione, nell'unità di tempo, della quantità di moto del fluido contenuto nel volume di riferimento vale $q \cdot (v_2 - v_1)$. Se quindi i due vettori disegnati nelle sezioni di ingresso e uscita del fluido hanno modulo proporzionale alle quantità di moto in ingresso e in uscita nell'unità di tempo, la loro differenza rappresenterà la risultante delle forze applicate dalla lastra curva alla porzione di fluido inclusa nel volume di riferimento, risultante mostrata in Fig. 7.22 come somma della qv_2 con la $-qv_1$.

Se invece, come di consueto, riveste maggiore interesse la risultante delle forze trasmesse dal fluido alla lastra, basta per questo cambiare di segno il vettore risultante \mathbf{R} ottenuto. Nel procedimento esaminato non si è fatta una differenza tra quantità di moto, ma tra quantità di moto divise per un tempo unitario. Questo è possibile, ai fini della valutazione della derivata della quantità di moto, soltanto se il flusso che percorre il profilo della lastra è stazionario, tanto da poter identificare la derivata $d\mathbf{Q} / dt$ con qv , cioè con il prodotto della portata in massa per la velocità. Il procedimento adottato è valido qualunque sia la forma del corpo investito dal fluido, chiusa o aperta, a condizione che si sia, appunto, in presenza di un flusso stazionario. La propulsione dei pesci può essere analizzata osservando che nei pesci carangiformi, quelli che nuotano a velocità più elevate, la sezione della pinna caudale ha la forma di un profilo idrodinamico. Le componenti delle forze di portanza e resistenza nella direzione del moto del pesce sono le forze propulsive. In questo caso il moto della pinna non si può considerare stazionario, la velocità cambia in continuazione tra limiti uguali e opposti, a ogni ciclo.

Esempio 7.5 (La propulsione velica). La Fig. 7.23 mostra una barca a vela in navigazione con un vento di bolina, formante cioè un angolo minore di 90° rispetto alla direzione di avanzamento, \mathbf{VW} . Per studiare le azioni impartite dal movimento del vento alla vela, dobbiamo per prima cosa calcolare la direzione del vento relativo alla barca. L'operazione grafica è elementare poiché si tratta semplicemente di sot-trarre, ovvero sommare col verso cambiato, al vettore che rappresenta l'intensità e la direzione del vento, il vettore che rappresenta la velocità della barca. Il vento relativo alla barca sarà \mathbf{VWB}_1 . Se adesso consideriamo l'evoluzione di un kg d'aria che lambisce la vela, osserviamo che la sua quantità di moto (rispetto alla barca) \mathbf{VWB}_1 cambia in direzione, anche se il suo modulo può, in prima

approssimazione, essere considerato costante. Questa ipotesi deriva dal fatto che la resistenza tangenziale opposta dalla vela al moto dell'aria è modesta. Il nostro kg d'aria esce dal bordo d'uscita della vela tangenzialmente a questa, il vettore che rappresenta la sua velocità è V_{WB2} . La variazione della quantità di moto del kg d'aria, rispetto alla barca, sarà quindi data

 Image 798

 Image 799

 Image 800

 Image 801

 Image 802

 Image 803

226

7 Analisi delle forze

dalla differenza tra V_{WB2} , valore all'uscita dalla vela e V_{WB1} , valore all'ingresso. La semplice costruzione di questa differenza di vettori è rappresentata in corrispondenza del bordo d'uscita della vela. Ma dalla (7.8.1) ricaviamo che:

t_2

"

$$\sum F_i = R = dQ;$$

$$R dt = Q_2 - Q_1 = V_{WB2} - V_{WB1} .$$

(7.8.2)

dt

t_1

Quindi l'impulso delle forze che agiscono sul kg d'aria che percorre la vela dall'istante t_1 all'istante t_2 sarà dato da $\mathbf{VWB}_2 - \mathbf{VWB}_1$. Si può anche ammettere che, nell'intervallo da t_1 a t_2 , le forze agenti sul kg d'aria si mantengano costanti, si avrà quindi:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 = \mathbf{VWB}_2 - \mathbf{VWB}_1 .$$

(7.8.3)

$t_2 - t_1$

$t_2 - t_1$

Ricordiamo ancora che \mathbf{R} rappresenta la forza agente sul kg d'aria che percorre la vela e non la forza che questo esercita sulla vela, uguale alla prima e di segno opposto.

Se \mathbf{R} è la forza agente su un kg d'aria, dobbiamo tener presente che il numero di kg d'aria che lambiscono la vela è dato dalla portata d'aria per l'intervallo di tempo $t_2 - t_1$.

$$M = q(t_2 - t_1) .$$

(7.8.4)

Sostituendo nella (7.8.3) si ha:

$$\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2$$

$$\mathbf{R}_{TOT} = \mathbf{MR} = M$$

$$= q(t_2 - t_1)\mathbf{VWB}_2 - \mathbf{VWB}_1 = q! \mathbf{VWB} .$$

(7.8.5)

$t_2 - t_1$

$t_2 - t_1$

La \mathbf{RTOT} è quindi la forza che la vela imprime alla massa d'aria che la lambisce. Ma la forza che agisce sulla vela è rappresentata da un vettore uguale a \mathbf{RTOT} e di verso contrario. In Fig. 7.23 è rappresentata la forza agente sulla vela per unità di massa d'aria. Questa forza si può scomporre in due parti, una secondo la direzione del Fig. 7.24. Propulsione velica

Image 804

7.9 Forze di campo

227

moto, la forza propulsiva P , l'altra secondo la direzione normale, T . È interessante osservare che più la bolina è stretta, cioè minore è l'angolo formato dalla direzione di avanzamento col vento, maggiore è la componente trasversale (che provoca soltanto un moto di scarroccio della barca, contrastato dalla deriva) e minore quella propulsiva. Il lettore potrà esercitarsi ad indagare qual è la direzione del vento ottimale, per ottenere la massima forza propulsiva. La facile risposta "col vento in poppa" è, contro l'intuizione, errata.

7.9 Forze di campo

Tra le forze di campo più frequentemente trattate nei problemi di ingegneria troviamo:

-

forze di gravità;

-

forze elettromagnetiche;

-

forze d'inerzia.

Forze di gravità

Il campo della gravità dovuto all'attrazione terrestre su qualunque corpo dotato di massa genera forze proporzionali alla massa del corpo e all'accelerazione di gravità, variabile con la latitudine e con la quota. Il valore standard dell'accelerazione di gravità è $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$. La variazione con la latitudine e la quota è ben approssimata dalla formula:

$$g = 9,78075 * (1 + 0,00524 \sin^2 L * (1 - 2,926 * 10^{-8} h)) \text{ m/s}^2$$

in cui L è la latitudine in gradi e h la quota, in metri sul livello del mare. La forza di gravità di un corpo deve essere considerata come risultante delle forze elementari che agiscono sulle sue particelle dotate di massa, ed è applicata nel baricentro. La forza è diretta dal baricentro del corpo verso il centro della terra. Il suo valore è $P = mg$.

Forze elettromagnetiche

Quando una particella elettrica con carica e si trova all'interno di un campo elettrico, essa è soggetta ad una forza che vale:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}$$

dove \mathbf{E} è l'intensità del campo elettrico. Se la particella è mobile all'interno di un campo magnetico con intensità \mathbf{H} essa è soggetta ad una forza pari a: $\mathbf{F} = e\mathbf{V} \times \mathbf{H}$

dove \mathbf{V} è il valore del potenziale elettrico nel punto in cui si trova la particella.

 Image 805

 Image 806

 Image 807

 Image 808

 Image 809

7 Analisi delle forze

Forze d'inerzia. Il principio di d'Alembert

Per il secondo principio della dinamica, più estesamente illustrato nel seguito, un corpo soggetto ad un sistema di forze acquista un'accelerazione data da:

$$\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} .$$

(7.9.1)

L'accelerazione assunta dal corpo è un vettore, con la stessa direzione del risultante

|

delle forze agenti sul corpo e con modulo pari a $\sum \mathbf{F}_i | = R$. Se la risultante delle forze

m

applicate non passa per il baricentro G e sul corpo sono applicate anche coppie C, si ha, assumendo il baricentro come polo dei momenti:

$$\sum (\mathbf{C}_i + \mathbf{G}\mathbf{P} \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{J} \ddot{\mathbf{H}} .$$

(7.9.2)

Le equazioni del moto scritte precedentemente vengono riformulate, secondo il principio di d'Alembert, come equazioni d'equilibrio portando al primo membro i termini

– $m\mathbf{a}$ e $-\mathbf{J} \ddot{\mathbf{H}}$ che assumono il carattere di forza e coppia d'inerzia. Le equazioni del moto diventano così equazioni di *equilibrio dinamico*:

$$\sum \mathbf{F}_i - m\mathbf{a} = 0$$

(7.9.3)

$$\sum(C_i + G\mathbf{P} \times \mathbf{F}_i) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{H} = 0 .$$

(7.9.4)

Un corpo dotato di un'accelerazione di traslazione e di un'accelerazione angolare è soggetto ad una forza d'inerzia pari a $-\mathbf{m}\mathbf{a}$, essendo \mathbf{a} l'accelerazione del suo baricentro e ad una coppia d'inerzia $-\mathbf{J} \cdot \mathbf{H}$, essendo \mathbf{J} la sua matrice d'inerzia rispetto ad assi baricentrici e convertire il vettore della sua accelerazione angolare.

Esempio 7.6. Un punto materiale si muove con velocità costante, di moto circolare.

La sua accelerazione è puramente centripeta e vale $-\frac{v^2}{r}$. A questa accelerazione r

corrisponde una forza d'inerzia (la forza centrifuga) di valore pari a $-\mathbf{m}\mathbf{a}$ cioè $m \frac{v^2}{r}$.

r

In queste condizioni il punto non può essere in equilibrio senza una forza che equilibri la forza centrifuga, diretta cioè dal punto verso il centro.

Fig. 7.25. Forze d'inerzia nel moto circolare

 Image 810

8

Elementi di statica

8.1 Equilibrio di semplici elementi strutturali

Leggi dell'equilibrio statico

Partiamo dalla seconda legge della dinamica, espressa per moti di traslazione e di rotazione:

•

l'applicazione di una forza produce in un corpo un'accelerazione tale che il prodotto della massa del corpo per l'accelerazione è uguale alla forza agente.

Per moti di traslazione si ha:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{R} = m \mathbf{a} .$$

(8.1.1)

Per moti di rotazione:

$$\sum \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{R} = \mathbf{J} \ddot{\theta} .$$

(8.1.2)

Con \mathbf{J} matrice d'inerzia e $\ddot{\theta}$

" accelerazione angolare. Se un corpo non trasla (o si muove con moto rettilineo uniforme), sotto l'azione di un sistema di forze esterne e reazioni vincolari, avremo $\mathbf{a} = 0$ perché la sua accelerazione sarà nulla. Analogamente se il corpo è in equilibrio alla rotazione (o ruota con moto circolare uniforme), si avrà $\ddot{\theta} = 0$

" = 0 Le relazioni precedenti diventano rispettivamente:

$$\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{R} = 0;$$

$$\sum \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{R} = 0 .$$

(8.1.3)

Se un corpo è in equilibrio, o trasla con moto rettilineo uniforme, la risultante delle forze e reazioni ad esso applicate è nulla. Analogamente se un corpo è in equilibrio alla rotazione, il momento risultante di tutte le forze e coppie agenti è nullo.

Per scrivere le condizioni di equilibrio di un corpo, è necessario prima isolare questo dall'ambiente esterno, sostituendo ai vincoli le reazioni vincolari. Come si è detto in precedenza, gli schemi che così si ottengono, prendono il nome di *diagrammi di corpo libero*. Si consideri ad esempio il caso della Fig. 8.1, che mostra come un sistema composto da tre corpi, connessi con vincoli diversi, venga scomposto in tre corpi semplici, sostituendo ai vincoli di connessione le relative reazioni vincolari, o Picasso B.: Fondamenti di Meccanica e Biomeccanica. Meccanica dei corpi rigidi articolati.

DOI 10.1007/978-88-470-2333-8_8, © Springer-Verlag Italia 2013

 Image 811

230

8 Elementi di statica

Fig. 8.1. Diagrammi di

corpo libero di un sistema

azioni mutue. Nel caso in esame è facile vedere che il numero di componenti di forza incognite è sette, mentre le equazioni di equilibrio alla rotazione e alla rotazione, sono tre per ciascun corpo, l'auto e l'uomo che spinge. La strada non è utilizzabile come corpo libero, in quanto non è finito e determinabile il sistema di forze che agisce su di essa. Esistono quindi sette incognite per sei equazioni. Il problema sarebbe risolvibile con una condizione ulteriore, ad esempio ipotizzando una relazione di proporzionalità tra le reazioni orizzontali H_3 , H_4 e le corrispondenti reazioni verticali, attraverso il coefficiente di attrito volvente, esaminato nel seguito. Richiamando la nozione di gradi di libertà di un sistema, già introdotta, si può definire il corpo isostatico, se i vincoli presenti sono in numero strettamente sufficiente per cancellarne i gradi di libertà, labile se sono insufficienti, iperstatico se il numero dei gradi di libertà cancellati dai vincoli è superiore a quello del sistema.

Se il sistema è isostatico, sarà possibile, isolando i corpi che lo compongono, scrivere tante equazioni di equilibrio quante sono le componenti incognite di

forza da determinare. Per i sistemi iperstatici occorrono condizioni addizionali che tengano conto della congruenza, cioè dello stato di deformazione del corpo e della compatibilità di questo stato con i vincoli.

Alcuni semplici sistemi

Si considerino i sistemi semplici della Fig. 8.2. È agevole vedere che il primo sistema è labile con un grado di libertà, il secondo è anch'esso labile con due gradi di libertà, il terzo isostatico, il quarto iperstatico.

 Image 812

 Image 813

8.1 Equilibrio di semplici elementi strutturali

231

Fig. 8.2. Alcune strutture semplici vincolate

Fig. 8.3. Separazione della struttura nei suoi elementi

Problema a)

Considerando il caso a), se il sistema è in equilibrio sotto l'azione delle forze applicate e delle reazioni vincolari, supponendo che la forza P sia conosciuta, le componenti incognite da determinare sono la componente verticale della reazione in B , le due componenti della reazione in A , le due componenti della reazione in O e il momento $C1$, complessivamente sei componenti di forza, numero eguale a quello delle equazioni disponibili. Se guardiamo al sistema come il modello di una gamba, in cui viene applicata una forza P nella caviglia, supponendo che la caviglia sia vincolata a scorrere su una guida orizzontale, vediamo che la coppia $C1$ è semplicemente la coppia risultante delle azioni muscolari sull'anca che contrastano il movimento della gamba.

Per trattare il problema della determinazione delle componenti di forza e momento incognite, occorre:

•

eliminare i vincoli esterni ed interni, sostituendo a ciascuno di questi le due componenti orizzontale e verticale delle reazioni vincolari in O, A e soltanto verticale, in B. Questo sezionerà il sistema in due segmenti indipendenti;

•

scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione per ciascuno dei corpi che compongono il sistema. Trattandosi di un sistema piano, le equazioni per ciascun corpo saranno tre.

 Image 814

232

8 Elementi di statica

Fig. 8.4. Asta scarica

Si scriveranno quindi sei equazioni, che permetteranno di trovare facilmente le componenti incognite delle reazioni vincolari e il momento della coppia C1. La Fig. 8.4

illustra il procedimento anche per via grafica. In effetti, nel caso di sistemi piani, per imporre la condizione di annullamento della risultante del sistema di forze che agisce sul corpo, si può costruire il poligono delle forze, riportando ciascuna delle forze agenti, parallelamente a se stessa e tracciando un poligono che, per l'equilibrio, deve essere chiuso.

Sempre con riferimento al caso a) si può considerare l'equilibrio, nonostante i vincoli siano insufficienti per garantirlo, se si ammette che il sistema delle forze esterne e delle reazioni vincolari abbia risultante e momento risultante nulli. Le incognite sono 6, essendo la forza P nota, H_0 , V_0 , H_A , V_A , V_B , C. Le equazioni sono sei, tre per ciascuna delle aste. Si ha quindi:

$$H_0 - H_A = 0$$

$$V_0 + V_A = 0$$

$$HA1 \sin 0 + VA1 \cos 0 - C = 0$$

$$HA - P = 0$$

$$VB - VA = 0$$

$$VA2 \cos 1 - HA2 \sin 1 = 0 .$$

(8.1.4)

Le equazioni precedenti permettono di ricavare le reazioni incognite in modo assai facile e diretto.

Se si vuole operare graficamente e intuitivamente, si può osservare che, nella seconda asta la risultante delle forze P e VB, come pure quella delle HAVA, Fig. 8.4, devono essere dirette come la linea d'asse dell'asta. In modo del tutto analogo si opera per l'altra asta. La soluzione grafica è in genere molto rapida per problemi piani, o a questi riconducibili. Quando esiste la soluzione analitica, è possibile trovare la soluzione anche per via grafica. Naturalmente bisogna essere disposti a pagare un certo prezzo in termini di approssimazione dei risultati, a fronte di un vantaggio nella rapidità della procedura. Spesso la soluzione grafica viene trovata come prima soluzione approssimata, per ottenere un ordine di grandezza e per procedere successivamente al calcolo analitico.

 Image 815

8.1 Equilibrio di semplici elementi strutturali

233

Fig. 8.5. Il problema b)

Vincoli interni

In un sistema costituito da più segmenti esisteranno in genere vincoli che legano il sistema all'ambiente esterno, considerato stazionario ed immobile, e vincoli che connettono segmenti diversi, ambedue mobili. Per il terzo principio della dinamica (principio di azione e reazione), le componenti di

forza trasmesse dal primo elemento al secondo sono eguali e opposte in verso alle componenti trasmesse dal secondo al primo elemento. Per ogni vincolo interno, in un problema piano sono presenti al massimo tre incognite.

Problema b)

Si può procedere, Fig. 8.5, scrivendo le equazioni di equilibrio, come si è appena visto, oppure osservando che la reazione nella cerniera A deve essere verticale ed eguale in modulo a P1, quindi si può procedere alla costruzione del poligono delle forze per la seconda asta, come indicato in figura. La costruzione inizia con le componenti note, sino a tracciare un segmento verticale indefinito che segna la direzione di P0. Ripartendo quindi dall'origine di VA si traccia una linea orizzontale (direzione di H0), sino ad incontrare la verticale prima tracciata. L'intersezione delle due linee determina il modulo delle due componenti incognite, P0, H0.

Problema c)

Si tratta della struttura isostatica conosciuta come arco a tre cerniere. Si procede in modo identico al problema a), con l'avvertenza che le incognite sono le 6 componenti di reazione in A,B,C. Come si è osservato in precedenza, se un segmento non sopporta forze normali al suo asse od oblique, esso può trasmettere soltanto forze assiali (nell'ingegneria strutturale prende il nome di *tirante* se soggetto a trazione, *puntone* se soggetto a compressione). Nel nostro caso il segmento AB trasmette forze soltanto nella direzione del suo asse. La reazione in A ha quindi la direzione del segmento AB.

Si può anche osservare che il segmento BC è soggetto a tre forze, la reazione trasmes-sagli da AB, quella in C e la forza esterna P. Perché tre forze complanari possano farsi equilibrio, cioè avere risultante nulla, occorre che le loro rette d'azione si incontrino

 Image 816

 Image 817

8 Elementi di statica

Fig. 8.6. Il problema c)

in un punto. Questa condizione può essere utilizzata per tracciare il poligono delle forze agenti sul segmento BC.

Problema d)

Si tratta di un problema iperstatico, non risolubile con i metodi appena trattati, in quanto le equazioni a disposizione sono in numero insufficiente per determinare le incognite corrispondenti alle reazioni vincolari. Problemi di questo tipo possono essere risolti quando si introducano relazioni supplementari che mettano in gioco la deformabilità della struttura.

Esempio 8.1. Si consideri ora l'esempio della Fig. 8.7. Una trave uniforme è incernierata ad una parete verticale nel suo estremo sinistro, mentre l'estremo destro è sostenuto da un cavo fissato alla parete, che forma un angolo di 53° con la direzione orizzontale. Sul punto di mezzo C della trave insiste un carico $W_2 = 400 \text{ N}$. La lunghezza della trave è 4 m e il suo peso 600 N. Si calcoli la tensione del cavo e la reazione vincolare in A.

Soluzione. Ancora una volta ci troviamo di fronte a un sistema composto da tre corpi, la parete il cavo e la trave. I relativi diagrammi di corpo libero sono tracciati nel-Fig. 8.7. Trave incernierata ad una parete verticale sospesa con un cavo

 Image 818

8.1 Equilibrio di semplici elementi strutturali

235

Fig. 8.8. Diagrammi di corpo libero della trave sospesa

la Fig. 8.8. Possiamo, osservando i diagrammi, fare alcune interessanti osservazioni sulle forze scambiate tra i vari elementi. Le forze di tensione ai due estremi del cavo devono essere, per l'equilibrio del cavo stesso, uguali ed opposte. La forza in B deve essere eguale ed opposta alla tensione del

cavo. Infine, possiamo osservare che tre forze complanari possono essere in equilibrio soltanto se le loro rette d'azione passano per uno stesso punto. Quindi la retta d'azione di RA deve passare per il punto d'incontro delle rette d'azione di T e $W_1 + W_2$. Dalla proprietà enunciata deriva una semplice soluzione grafica del problema, mostrata nella Fig. 8.8. Basta infatti costruire il poligono delle forze riportando dalle estremità della forza $W_1 + W_2$ due linee parallele alle rette d'azione di T e RA. I segmenti ottenuti rappresentano le forze T e RA nella stessa scala di $W_1 + W_2$. La soluzione analitica del problema si ottiene scrivendo le equazioni di equilibrio alla traslazione nelle direzioni orizzontale e verticale ed alla rotazione intorno, per esempio al punto A:

$$RAX - T \cos 2 = 0$$

$$RAY - (W_1 + W_2) + T \sin 2 = 0$$

$$T \sin 2 \cdot l - (W_1 + W_2) \cdot l/2 = 0 .$$

(8.1.5)

Il lettore potrà svolgere i semplici calcoli numerici per risolvere il problema, sostituendo i valori dei dati e risolvendo il semplice sistema di equazioni lineari (8.1.5).

Esempio 8.2 (Forze trasmesse mediante elementi flessibili). Si osservi la Fig. 8.9, che mostra il sollevamento di un carico mediante una carrucola. La carrucola si compone di una puleggia, su cui si avvolge parzialmente una fune o altro elemento flessibile. Nella parte destra della Fig. 8.9 sono rappresentati i diagrammi di corpo libero per ciascuno dei tre corpi del sistema, l'uomo, la puleggia, il corpo sospeso. Quest'ultimo è in equilibrio sotto l'azione della fune e del suo peso. Il tratto di fune verticale tra la puleggia e il carico è in equilibrio sotto l'azione di due forze eguali e contrarie T_2 . La puleggia è in equilibrio sotto un sistema di quattro forze T_1 , T_2 , V_2 , H_2 . Le ultime due componenti sono trasmesse all'asse della puleggia dal supporto che fissa quest'ultima ad una struttura fissa. Per quanto riguarda la persona, ammettendo che la reazione del suolo sia singola, questa, perché l'equilibrio sia possibile, deve passare per il punto d'intersezione delle rette d'azione del tiro della fune T_1 e del peso

 Image 819

 Image 820

236

8 Elementi di statica

Fig.

8.9.

Sollevamento

mediante una carrucola

del corpo W1. Per la puleggia possiamo scrivere le solite tre equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale, verticale e alla rotazione. L'ultima equazione può essere scritta annullando la somma dei momenti rispetto al centro della puleggia, scelto come polo. Si ha in conclusione il sistema di equazioni:

$$T_2 - W_2 = 0$$

$$H_2 - T_1 \cos \theta = 0$$

$$V_2 - T_1 \sin \theta - T_2 = 0$$

$$T_1 r - T_2 r = 0$$

$$T_1 \sin \theta - W_1 + R_{1h} = 0$$

$$T_1 \cos \theta - R_{1v} = 0 .$$

(8.1.6)

Essendo r il raggio della puleggia. Le incognite sono T_1 , T_2 , H_2 , V_2 , R_{1h} , R_{1v} , facilmente determinabili risolvendo il sistema (8.1.6). Si noti come la quarta equazione porta a $T_1 = T_2$.

Utilizzando organi flessibili si possono ottenere sistemi per la moltiplicazione della forza applicata (argani), come ad esempio nel caso dei sistemi sanitari per la trazione degli arti. Nel caso presentato nella Fig. 8.10, con l'applicazione di un peso W si ottiene una forza di trazione doppia. Utilizzando pulegge fisse e mobili si ottengono sistemi per la moltiplicazione della forza applicata anche con multipli più elevati. Si osservi che la puleggia collegata nel suo centro al bendaggio del piede è mobile, le restanti sono fisse.

Fig. 8.10. Trazione degli arti

 Image 821

 Image 822

8.1 Equilibrio di semplici elementi strutturali

237

Travi incastrate ad un estremo e libere all'altro

Lo schema statico di una trave incastrata è rappresentato nella Fig. 8.11. Nella parte inferiore è riportato il diagramma di corpo libero. Al posto del vincolo di incastro vengono riportate le tre componenti della reazione, una forza verticale V_0 , una orizzontale H_0 ed una coppia M_0 . Le corrispondenti equazioni d'equilibrio hanno la semplice forma:

$$V_0 - F = 0$$

$$H_0 = 0$$

$$- F * L + M_0 = 0$$

da cui si trae:

$$V_0 = F;$$

$$H_0 = 0;$$

$$M_o = F * L .$$

(8.1.7)

Il fatto che la componente orizzontale della reazione nell'incastro sia nulla, deriva dall'assenza di forze orizzontali. Se esistessero forze dirette obliquamente rispetto alla linea d'asse della trave, si avrebbero valori non nulli di questa componente. Esaminiamo ora il caso di una trave a L, incastrata ad un estremo, Fig. 8.12. Il problema non è più piano perché sia la forza agente all'estremità, che ha componenti secondo i tre assi coordinati, sia il vincolo di incastro, che sopprime 6 gradi di libertà, devono essere considerati nello spazio. Le equazioni d'equilibrio viste negli esempi precedenti non sono più applicabili, per cui dobbiamo ricorrere a una scrittura vettoriale delle equazioni stesse. Nel vincolo abbiamo una coppia risultante di momento M_o , di cui non conosciamo modulo e direzione, e una reazione R , incognita. Le componenti del momento risultante sono tre, secondo gli assi coordinati. Il diagramma di corpo libero è rappresentato nella Fig. 8.13. Ci si può domandare perché la risultante delle azioni vincolari R non abbia la stessa linea d'azione della forza F . La risposta è che il sistema delle reazioni vincolari e delle forze esterne è complessivamente equilibrato, **Fig. 8.11**. Trave incastrata ad un estremo

Fig. 8.12. Trave a L

 Image 823

238

8 Elementi di statica

Fig. 8.13. Diagramma di corpo libero

L'insieme delle due forze uguali, R ed F , forma una coppia, il cui momento è uguale e di segno opposto al momento M_o . Possiamo ora scrivere le equazioni di equilibrio in forma vettoriale, imponendo che la risultante delle forze esterne e reazioni vincolari e il momento risultante, rispetto a un polo qualsiasi, delle forze esterne e delle reazioni vincolari siano nulli. Abbiamo quindi assumendo come polo l'origine del sistema di coordinate:

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = 0$$

$$\mathbf{F} \times (\mathbf{O} - \mathbf{P}) + \mathbf{M} = 0 .$$

(8.1.8)

Le (8.1.8) rappresentano due equazioni vettoriali, corrispondenti a 6 equazioni scalari che permettono di ottenere le sei incognite scalari $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$. Svolgeremo l'operazione a titolo di esempio scrivendo i vettori con le relative componenti.

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]$$

$$\{ F_x \} \{ R_x \}$$

$$[F_y] + [R_y] = 0$$

(8.1.9)

FZ

RZ

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \left(\left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \\ \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right]$$

}

$$\{ F_x \}$$

$$\{ x_0 \} \{ x_P \}$$

$$\{ M_x \}$$

\

) +

$$[F_y] \times [y_0] - [y_P]$$

$$[MY] = 0 .$$

(8.1.10)

FZ

zO

zP

MZ

Da cui le sei equazioni scalari:

$$FX + RX = 0$$

$$FY + RY = 0$$

$$FZ + RZ = 0$$

$$FY(zO - zP) - FZ(yO - yP) + Mx = 0$$

$$- FX(zO - zP) + FZ(xO - xP) + My = 0$$

$$FX(yO - yP) - FY(xO - xP) + Mz = 0 .$$

(8.1.11)

8.2 Elementi strutturali. Cenno sui casi di sollecitazione

Gli elementi strutturali soggetti a carichi, rispondono deformandosi, in modo spesso non percettibile ad occhio nudo. Se il materiale da cui l'elemento è costituito, al cessare della situazione di carico, torna allo stato indeformato, questo viene definito elastico. Se al crescere dei carichi crescono nella stessa misura anche le deformazioni, il materiale è lineare. Un corpo costituito da un materiale elastico o lineare elastico,

 Image 824

 Image 825

 Image 826

 Image 827

 Image 828

 Image 829

 Image 830

8.2 Elementi strutturali. Cenno sui casi di sollecitazione

239

al crescere dei carichi applicati e quindi delle deformazioni, incamera energia elastica al suo interno, in modo analogo ad una molla. Quest'energia viene restituita nel momento in cui i carichi vengono rilasciati e il materiale ritorna alla condizione in-deformata. I tipi di sollecitazione che possono applicarsi ad una trave sono diversi. Li descriveremo brevemente. Questi argomenti sono trattati nei corsi di resistenza dei materiali.

Presenteremo tre casi di sollecitazione fondamentali.

Trazione-compressione

I carichi assiali generano uno stato di trazione con tensioni $\sigma = F / A$, con F forza applicata (si tratta evidentemente di un sistema equilibrato di due forze F eguali) e A area della sezione. L'allungamento della trave è:

$$\Delta l = Fl$$

(8.2.1)

EA

in cui F è la forza applicata, l la lunghezza della trave, E il modulo elastico e A la sezione.

Nel caso di un elemento elastico in trazione la rigidezza si definisce, come per una molla, come rapporto tra la forza applicata e l'allungamento, si ha quindi: $k = F = EA$.

!

(8.2.2)

l

l

Fig. 8.14. Trazione e compressione

Torsione

Un elemento strutturale è sollecitato da un sistema di coppie di torsione equilibrate. In questo caso nella sezione nascono tensioni tangenziali, date dall'espressione, valida per una sezione circolare.

$A = Mtr$.

(8.2.3)

Jp

Nelle condizioni di sollecitazione viste sopra, è evidente che si avrà una rotazione relativa della sezione di destra rispetto a quella di sinistra. Questa rotazione vale:

$!H = Mtl$.

(8.2.4)

GJp

Fig. 8.15. Sollecitazioni di torsione

 Image 831

 Image 832

 Image 833

 Image 834

 Image 835

 Image 836

 Image 837

 Image 838

240

8 Elementi di statica

Nelle espressioni precedenti r è il raggio della sezione, G il modulo di elasticità tangenziale, legato al modulo E di elasticità normale e al coefficiente di contrazione trasversale dall'espressione:

$G =$

E

\cdot

$2(1 + \nu)$

Negli elementi in torsione la rigidezza si definisce come il rapporto tra il momento torcente applicato e la rotazione relativa delle sezioni cioè:

$k = M_t = GJ_p \cdot$

θ

(8.2.5)

1

Flessione

La Fig. 8.16 illustra un caso tipico, non l'unico possibile, di trave in flessione, la trave incastrata ad un estremo. Nella sezione si sviluppano tensioni normali, di compressione nelle fibre superiori, di trazione in quelle inferiori. Il valore della massima sollecitazione di trazione o compressione è:

$$\sigma = My$$

(8.2.6)

J

dove M è il momento flettente nel punto considerato, pari al prodotto del modulo delle forze agenti a destra della sezione e dei momenti delle eventuali coppie presenti a destra della sezione. Nel caso in esame $M = F \cdot a$. Y è la distanza del punto considerato dall'asse neutro, linea ideale che separa nella sezione la parte tesa da quella compressa. In figura è rappresentata la sezione della trave, sollecitata da tensioni di trazione nella parte superiore (indicate col segno +) di compressione nella parte inferiore. Nel caso della flessione la rigidezza si definisce come rapporto tra il carico applicato e la freccia Δl che vale all'estremità:

$$\Delta l = Fl^3 \text{ quindi si ha } k = F / \Delta l = 3EJ / l^3 .$$

(8.2.7)

3EJ

Δl

l^3

Fig. 8.16. Trave incastrata ad un estre-

mo

8.3 Applicazione dei principi della statica alla biomeccanica Cercheremo di applicare i concetti precedentemente esposti all'analisi statica di alcuni segmenti del corpo umano. L'analisi si presenta, in molti casi, assai difficile, per i motivi seguenti:

-

si tratta nella grande maggioranza dei casi di problemi tridimensionali, nei quali il numero delle forze e reazioni da determinare è superiore a quello delle equazioni disponibili;

-

come abbiamo detto in precedenza, le articolazioni hanno un comportamento più complesso dei giunti meccanici semplici che abbiamo sinora analizzato;

-

i punti di fissaggio dei muscoli ai segmenti ossei e la direzione delle forze muscolari sono determinabili con molte incertezze, un discorso analogo vale per i pesi e la posizione dei baricentri.

Presenteremo alcuni casi statici in cui il problema viene fortemente semplificato, con le seguenti ipotesi di lavoro:

-

si assume che le articolazioni esaminate corrispondano ad uno dei semplici modelli meccanici sinora esaminati;

-

siano noti i punti d'attacco dei muscoli sui segmenti ossei e la direzione delle forze muscolari;

-

siano note le posizioni dei baricentri e le masse dei vari segmenti analizzati;

-

l'attrito nelle articolazioni sia trascurato;

-

si trascurino eventuali forze d'inerzia;

-

i problemi che affronteremo saranno spesso piani. Gli esempi affrontati saranno utili come punto di partenza per andare verso modelli più complicati ed aderenti alla realtà.

Ricordiamo che una breve descrizione della funzione dei muscoli scheletrici e delle articolazioni per gli arti superiore ed inferiore è stata presentata nei capitoli 2 e 3.

La spalla

Non entreremo in una complessa descrizione delle strutture della spalla, ricordando soltanto che si tratta di un'articolazione di tipo sferico, con tre gradi di libertà. Il semplice, ma importante, esempio che qui presenteremo riguarda l'equilibrio statico della spalla quando il braccio è esteso e alla mano viene applicato un peso. Dato il tipo di articolazione, l'equilibrio non sarebbe possibile se l'articolazione non fosse bloccata completamente. Questo, in effetti, avviene per l'intervento di tutti i muscoli della spalla, ma l'azione prevalente è quella del deltoide, un muscolo a forma triangolare con tre elementi che è fissato da una parte alla clavicola, all'acromion e alla spina scapolare, dall'altra alla diafisi prossimale dell'omero. Lo schema della Fig. 8.17 mostra il braccio esteso, in equilibrio sotto l'azione del peso applicato alla mano W_1 , del peso proprio del braccio, W_2 , della forza muscolare generata dal deltoide, F_m e della reazione nell'articolazione R_s . Il diagramma di corpo libero è rappresentato nella stessa figura. Le equazioni di equilibrio si scrivono seguendo i principi già esposti.

 Image 839

 Image 840

8 Elementi di statica

Fig. 8.17. Equilibrio della spalla

Si giunge così facilmente alle espressioni:

$$R_{sv} - W_1 - W_2 = 0$$

$$F_m \cos \theta - R_{sh} = 0$$

$$- W_1(a + b) - W_2b + F_m \sin \theta * c = 0 .$$

(8.3.1)

Il braccio è assunto come una trave monolitica, senza considerare la sua articolazione nel gomito. A mantenere il braccio esteso, senza che il gomito si fletta, a causa delle forze esterne applicate, concorre l'azione di impuntamento dell'articolazione e l'azione di contrasto del bicipite. Nasce così una coppia di contrasto il cui momento impedisce l'estensione del gomito oltre l'allineamento tra omero e braccio.

Una seconda approssimazione

Esaminiamo ora un caso più complicato, quello dell'equilibrio del braccio quando il gomito è flesso all'incirca di 90° e la spalla abdotta di 45° . Ammettiamo anche di avere un sistema di forze con varie componenti in corrispondenza della mano. Il problema ora è marcatamente tridimensionale e non può più essere trattato come nel caso della Fig. 8.17. Una veloce analisi delle forze agenti ci porta ad individuare forze orizzontali e verticali sulla mano, forze verticali dovute al peso proprio dell'omero **Fig. 8.18**.
Analisi 3D dell'equilibrio

del braccio

 Image 841

 Image 842

8.3 Applicazione dei principi della statica alla biomeccanica

243

Fig. 8.19. Diagramma di corpo libero del

braccio

e delle parti muscolari e connettive ad esso connesse, il peso proprio dell'avambraccio, le forze muscolari dovute ai tre fasci del deltoide, al pettorale e ad altri muscoli fissati alla scapola. Se il braccio è in equilibrio questo si deve all'azione dei diversi muscoli della spalla. Dal momento che queste azioni impediscono qualunque movimento del braccio e bloccano quindi tutti i gradi di libertà possiamo tracciare il diagramma di corpo libero assumendo che il braccio sia una trave ad L incastrata all'estremità come nella Fig. 8.12 e Fig. 8.13. Le risultanti delle reazioni vincolari sono rappresentate nella Fig. 8.19 come due vettori, il primo R è la somma vettoriale delle reazioni vincolari e delle forze muscolari incognite, il secondo M_r è la coppia risultante il cui momento è pari alla somma dei momenti delle forze muscolari e della reazione del vincolo rispetto ad un polo assegnato. Il vettore M_r rappresentando una coppia e non una forza, è stato disegnato come una freccia con due punte avente la direzione dell'asse di rotazione. Le incognite sono proprio questi due vettori, che avendo ciascuno tre componenti, portano a sei il numero delle incognite scalari da determinare. Poiché possiamo scrivere sei equazioni di equilibrio, tre alla traslazione e tre alla rotazione il problema è facilmente risolto ricorrendo alle equazioni (8.1.8), (8.1.10), (8.1.11).

Purtroppo, operando in questo modo, arriveremo a conoscere la risultante e il momento risultante delle forze muscolari e della reazione, ma non le singole forze.

È necessario allora ricorrere a un'altra formulazione del diagramma di corpo libero, che mantiene tutte le forze muscolari e la reazione come incognite. La figura relativa è la Fig. 8.20, nella quale sono mostrati tutti i vettori incogniti. Le forze muscolari **Fig. 8.20.** Un altro diagramma di

corpo libero



8 Elementi di statica

da determinare sono state limitate a tre principali, quelle dovute ai tre fasci del deltoide. Se ammettiamo di conoscere, sulla base dell'anatomia, la direzione di queste forze, le incognite scalari da determinare scrivendo le equazioni di equilibrio sono i moduli delle forze muscolari, F_{m1} , F_{m2} , F_{m3} e le tre componenti di R_s . le equazioni sono, ancora una volta le (8.1.8), (8.1.10), (8.1.11), leggermente modificate per far figurare in esse le forze muscolari. Limitando a tre il numero delle forze muscolari da determinare le incognite scalari risultano sei e sono quindi in numero eguale alle equazioni disponibili.

$$\sum F_i + \sum W_i + \sum F_{mi} = 0$$

i

i

i

$$\sum F_i \times (\mathbf{O} - \mathbf{P}_i) + \sum W_i \times (\mathbf{O} - \mathbf{Q}_i) + \sum F_{mi} \times (\mathbf{O} - \mathbf{S}_i) = 0 .$$

(8.3.2)

i

i

i

Dove si sono indicati con P_i i punti di applicazione delle forze esterne, con Q_i quelli delle forze peso, con S_i quelli delle forze muscolari. Nelle equazioni di momento non compare il momento della reazione del vincolo perché si suppone di usare come polo dei momenti appunto il centro di

questo. Lasciamo al lettore per esercizio il compito di scrivere le equazioni scalari.

Equilibrio del gomito

La Fig. 8.21 mostra il braccio che, in corrispondenza della mano, sopporta un carico di peso noto. Se immaginiamo che l'unico muscolo in azione sia il bicipite, è facile rilevare che la forza muscolare può essere facilmente determinata con un'equazione di equilibrio di momento. In Fig. 8.21 si è riportato un disegno del braccio con il diagramma di corpo libero a fianco. Oltre al carico L che insiste sulla mano, è stato considerato anche il peso proprio dell'avambraccio W . Conoscendo il peso e il baricentro dell'avambraccio, le incognite da determinare sono le componenti della HC

Fig. 8.21. Equilibrio del

gomito

 Image 844

 Image 845

 Image 846

 Image 847

 Image 848

8.3 Applicazione dei principi della statica alla biomeccanica

245

reazione vincolare in C e la forza muscolare F_m . Si ha quindi:

$$H_C = 0$$

$$V_C + F_m - W - L = 0$$

$$F_m \sin H * a - W \sin H * b - L \sin H * l = 0$$

da cui si ha:

b

l

$$F_m = W + L$$

a

a

$$VC = W(1 - b) + L(1 - l).$$

(8.3.3)

a

a

Si osservi che la reazione vincolare V_c ha due componenti, la prima nella direzione dell'avambraccio, $V_c \cos H$, la seconda in direzione normale a questo, $V_c \sin H$.

$\sin H$.

Lo stesso problema ma con più muscoli

Riprendiamo il problema dell'equilibrio del gomito con un carico applicato alla mano, tenendo però in considerazione anche gli altri muscoli flessori, il brachiale e il brachioradiale. Lo schema statico è quello della Fig. 8.23. Il corrispondente diagramma di corpo libero è in Fig. 8.22. Siamo ora nel piano e le tre equazioni di equilibrio, una per la rotazione intorno al fulcro del gomito, le altre due per le due traslazioni si scrivono:

$$HC - FBR \cos \theta - FBRD \cos \phi = 0$$

$$VC + FBI + FBR \sin \theta + FBRD \sin \phi - W1 - W2 = 0$$

$$FBI \cdot h + FBR \sin \theta \cdot c + FBRD \sin \phi \cdot d - W2 \cdot a - W1 \cdot b = 0.$$

(8.3.4)

Sembra tutto estremamente semplice, ma non lo è. Le equazioni sono tre, le incognite FBI , FBR , $FBRD$, HC , VC sono cinque. Questo problema si presenta spesso nello studio biomeccanico, perché in ogni articolazione è presente una molteplicità di muscoli, cooperanti o antagonisti, che rende il problema insolubile senza ricorrere ad altre condizioni. Una possibile soluzione è quella di utilizzare un'ipotesi dovuta a (Alexander, Vernon, 1975), secondo la quale la forza massima che un muscolo può esercitare si

ottiene come prodotto di una sua sezione caratteristica, chiamata PCSA, **Fig. 8.22.** Diagramma di corpo libero

 Image 849

246

8 Elementi di statica

Physiological Cross Section Area, espressa come rapporto tra il volume del muscolo e la sua lunghezza, per uno sforzo @, uguale per tutti i muscoli di un certo tipo.

Se quindi, da dati anatomici, potessimo dedurre i valori delle PCSA per i muscoli di nostro interesse, le (8.3.4) diventerebbero:

$$HC - @ABR \cos 0 - @ABRD \cos 1 = 0$$

$$VC + @ABI + @ABR \sin 0 + @ABRD \sin 1 - W1 - W2 = 0$$

$$@ABI * h + @ABR \sin 0 * c + @ABRD \sin 1 * d - W2 * a - W1 * b = 0 .$$

(8.3.5)

Le incognite sono ora soltanto tre HC, VC, @ ed il problema è risolubile. L'ipotesi assunta alla base della soluzione del problema presta il fianco a molte critiche. Con rilievi EMG è stato verificato che i diversi muscoli vengono attivati in modo diverso dal nostro sistema neuromuscolare, sembra quindi discutibile che il potenziale di attivazione non entri in gioco come parametro nella valutazione delle forze muscolari.

Un'altra considerazione è che il corpo umano, nei milioni di anni della sua esperienza motoria, ha sviluppato una strategia "economica" nel movimento. Per fermarci sul nostro esempio, osservando la Fig. 8.22, ci si può rendere conto che i diversi muscoli che concorrono alla flessione del gomito, hanno inclinazioni e bracci diversi, rispetto all'articolazione. Si può pensare che si tenda a usare preferibilmente quei muscoli che hanno un

braccio maggiore, per realizzare il movimento in esame, perché con forze moderate si otterrebbero momenti elevati e l'equilibrio sarebbe ottenuto con valori bassi delle forze. È stato ipotizzato anche che, una possibile strategia del nostro sistema motorio sia quella di rendere minima la somma dei moduli delle forze impiegate per ottenere l'equilibrio. Per trasferire questo concetto in termini matematici, dovremmo imporre una condizione di minimo alla funzione:

$$f(F_{BI} , F_{BR} , F_{BRD}) = F_{BI} + F_{BR} + F_{BRD} = \min .$$

(8.3.6)

È evidente però che, in assenza di altre condizioni, la relazione precedente viene verificata quando

$$F_{BI} = F_{BR} = F_{BRD} = 0 .$$

(8.3.7)

Ma se le forze muscolari fossero tutte nulle, non sarebbero soddisfatte le condizioni d'equilibrio (8.3.4). Il problema matematico della minimizzazione della somma delle forze muscolari si formula *sotto condizione* che la terza delle (8.3.4) sia soddisfatta.

In questo caso, le prime due equazioni lo saranno certamente, con opportuni valori di HC e VC Ancora una volta questo può non essere sufficiente, perché la fisiologia **Fig. 8.23**. Equilibrio del gomito con tre muscoli attivi

 Image 850

 Image 851

 Image 852

8.3 Applicazione dei principi della statica alla biomeccanica

ci insegna che le forze muscolari non possono assumere valori negativi, cioè i muscoli non possono generare forze di compressione. Dobbiamo quindi aggiungere alla condizione di minimo (8.3.6) e alla terza delle (8.3.4) le ulteriori condizioni $FBI \geq 0$

$$FBR \geq 0$$

$$FBRD \geq 0 .$$

(8.3.8)

Riassumendo, il problema di minimo condizionato per la funzione somma delle forze muscolari, diventa un problema di ottimizzazione, la cui formulazione è la seguente: Minimizzare la funzione:

$$f(FBI , FBR , FBRD) = FBI + FBR + FBRD$$

sotto la condizione:

$$FBI * h + FBR \sin 0 * c + FBRD \sin 1 * d - W2 * a - W1 * b = 0$$

e con

$$0 \leq FBI \leq FBI , MAX$$

$$0 \leq FBR \leq FBR , MAX$$

$0 \leq FBRD \leq FBRD , MAX .$ (8.3.9) La procedura sembra molto attraente, perché sposa l'idea che l'organismo umano sia un risparmiatore d'energia. Il problema principale nella sua applicazione è la scelta della funzione da minimizzare. Alcuni ricercatori hanno proposto, in alternativa alla somma delle forze muscolari, la somma degli sforzi muscolari, con la funzione:
 $f(Fm1 Fmn) = Fm1 + + Fmn .$

(8.3.10)

A1

An

Equilibrio del capo

La Fig. 8.24 mostra una condizione d'equilibrio del capo. Il vincolo è costituito dall'articolazione della prima vertebra cervicale (atlante), i carichi sono il peso della testa, applicato nel baricentro della stessa, e la forza risultante dei muscoli estensori **Fig. 8.24**. Il capo come trave labile sotto un sistema di carichi equilibrato

 Image 853

248

8 Elementi di statica

del collo. Dal punto di vista dell'equilibrio delle forze, possiamo schematizzare la testa come una leva di primo grado, con la potenza all'estremità sinistra, la resistenza a destra, e il fulcro in posizione intermedia. Il braccio della forza muscolare è maggiore di quello del peso del capo. La struttura è labile, dotata di un grado di libertà.

Per questa ragione è necessario, per l'equilibrio, che il momento della forza muscolare e quello del peso siano eguali in ogni istante. Questa eguaglianza è ottenuta con reazioni muscolari, del tutto inconsce, che intervengono continuamente per esercitare il controllo della posizione della testa. La reazione vincolare in corrispondenza del \$

%

vincolo vale $P + F_m = P \cdot 1 + b$. È evidente che il carico sulla vertebra non è molto a

lontano da 1,5 volte il peso del capo. Questo ragionamento riguarda naturalmente le sole azioni statiche, potendo quelle dinamiche arrivare a raggiungere livelli anche dieci volte superiori. Le forze calcolate variano fortemente nel caso in cui la testa non sia in posizione verticale, ma il corpo sia piegato. In questo caso la forza peso cambia direzione e la forza muscolare cambia valore. Lasciamo la considerazione d'altre posizioni della testa ai trattati specialistici.

La colonna vertebrale

La colonna vertebrale è la parte più complessa del sistema muscolo-scheletrico.

È l'asse portante del nostro corpo. Oltre che proteggere, al suo interno il midollo spinale, lungo il quale passa tutta l'informazione neuromotoria, ha la funzione di sostenere la testa, il collo e le estremità superiori, trasferire i carichi della testa e del tronco alla pelvi, permettere una varietà di movimenti. La colonna vertebrale è composta di ventiquattro vertebre le cui articolazioni, assai complesse, prendono il nome di giunti anfiartroidali. Abbiamo già parlato dei dischi intervertebrali, di natura cartilaginea, che fanno funzionare le articolazioni tra una vertebra e l'altra come piccoli giunti sferici, permettendo tre rotazioni, di modesta entità, intorno a tre assi diversi. Agiscono anche come ammortizzatori attenuando gli effetti negativi dei carichi impulsivi che agiscono sulla colonna. Ad esempio quando si salta, senza la capacità ammortizzante dei dischi le sollecitazioni sulla colonna non sarebbero tollerabili. Due articolazioni della colonna sono particolarmente importanti, quella atlanto-occipitale tra la prima vertebra cervicale e l'osso occipitale della testa, e l'articolazione atlanto-assiale che connette l'atlante ed i processi dentari. Si tratta di una cerniera che permette alla testa di ruotare nel piano trasversale. La colonna riceve la sua stabilità dai dischi intervertebrali, dai legamenti e dai muscoli che la circondano. I muscoli della colonna sono disposti a coppie. La parte anteriore della colonna contiene i muscoli addominali, il retto addominale e i muscoli obliqui esterni e interni. Sono muscoli che attivano la flessione della colonna e mantengono gli organi interni in posizione.

Esistono tre strati di muscoli posteriori, erettori della colonna, semispinali, e spinali profondi. La loro funzione è principalmente quella di attivare l'estensione della colonna. Essi contrastano inoltre l'effetto della gravità. Il muscolo quadrato lombare è importante per la flessione laterale della colonna e agisce come stabilizzatore della pelvi e della sezione lombare. La flessione laterale del tronco è la conseguenza dell'azione dei muscoli addominali e posteriori. La rotazione del tronco è la conseguenza dell'azione simultanea dei muscoli anteriori e posteriori.

8.3 Applicazione dei principi della statica alla biomeccanica

249

La spina dorsale è soggetta a varie lesioni. Le più gravi sono quelle che coinvolgono il midollo spinale, che è immerso in un fluido e protetto dalla struttura ossea delle vertebre. Altre lesioni gravi sono le fratture delle vertebre e l'ernia dei dischi intervertebrali.

Equilibrio della gamba

Riprendiamo l'analisi del cammino, per svolgere alcune considerazioni sulle forze scambiate tra il piede e il terreno, forze trasmesse attraverso la catena cinematica a tre segmenti della gamba, sino all'articolazione dell'anca. Nella Fig. 8.25 sono schematicamente rappresentate tre fasi del cammino, per mostrare i muscoli attivati durante il ciclo della deambulazione. Come di consueto, si è fatto riferimento ad una sola gamba, rappresentata in grigio in Fig. 8.25. Nella posizione a si ha l'impatto col terreno del piede avanzato. Poiché il contatto avviene sul tallone, il piede tenderebbe a compiere una flessione plantare, controllata dal muscolo tibiale anteriore. La linea d'azione della forza di contatto passa in prossimità dell'articolazione del ginocchio.

Se passa, anteriormente, il suo effetto è quello di estendere l'articolazione, se passa posteriormente, si ha flessione. Il controllo dell'articolazione è compiuto congiuntamente dal semitendinoso, semimembranoso e dal quadricipite femorale. La stessa forza di contatto sul tallone provocherebbe una flessione dell'anca, controllata dal gluteo. Nella Fig. 8.25b l'appoggio sta per trasferirsi completamente sul piede anteriore. Il ginocchio è leggermente inflesso. Il quadricipite è attivo per contrastare la flessione del ginocchio. Il gluteo è attivo per controllare la flessione dell'anca. La tibia è in posizione prossima alla verticale, la risultante delle azioni del terreno passa per il centro della caviglia. Non sono necessarie azioni rilevanti di controllo da parte del tibiale anteriore o del gastrocnemio. In Fig. 8.25c la principale azione muscolare è volta al sollevamento del tallone. È compiuta attraverso la contrazione del gastrocnemio e del soleo. La risultante delle forze di contatto passa sulla parte anteriore della pianta. Il piede è dorsiflesso. Le posizioni che abbiamo illustrato sono semplicemente tre

esempi presi tra le molteplici configurazioni possibili. Se prendiamo l'intero corpo come sistema da analizzare, le uniche forze esterne sono le reazioni sui due piedi in appoggio bipodalico, su un singolo piede in appoggio monopodalico, la forza peso, **Fig. 8.25**. Forze scambiate col terreno durante il

cammino

a) b) c)

 Image 855

250

8 Elementi di statica

Fig. 8.26. Equilibrio del piede

applicata nel baricentro e le forze d'inerzia dovute alla presenza di accelerazioni nei vari segmenti.

Se, per semplicità, ci limitiamo a ipotizzare un regime quasi statico, resterebbero tre forze le cui linee d'azione, per l'equilibrio, dovrebbero passare per un unico punto. Nelle Fig. 8.25a e b, potremmo trovare le reazioni del terreno, semplicemente scomponendo la forza peso nella direzione della retta d'azione delle reazioni. Quanto più la verticale tracciata dal baricentro cade vicina al piede avanzato, tanto più sarà elevata la reazione in corrispondenza di questo. Le situazioni descritte sono estremamente semplificate rispetto alla realtà. Infatti, le reazioni sui due piedi non agiscono sullo stesso piano. Malgrado questo, il modello si presta a dare un'idea dell'entità delle forze presenti.

La Fig. 8.26 illustra le forze che agiscono sul piede nell'ultima fase di appoggio.

Si osserva che la forza esercitata sul calcagno dalla contrazione del gastrocnemio deve avere, per l'equilibrio alla rotazione del piede intorno alla caviglia, un modulo maggiore della reazione di appoggio sul terreno,

per la diversità dei bracci. Il piede arretrato sopporta tutto il peso del corpo. La risultante delle azioni di contatto ha due componenti, quella verticale, eguale al peso del corpo, se il piede a contatto è uno solo, e quella orizzontale che ha il ruolo di spinta propulsiva. Non si può determinare a priori con ragionamenti teorici la linea d'azione della forza R_s . Essa può essere determinata sperimentalmente mediante una piattaforma dinamometrica. La forza F_{gs} è invece nota, soltanto in direzione e verso. Se, a titolo di pura speculazione, immaginiamo che la componente orizzontale della forza F_s sia pari al prodotto del coefficiente d'attrito tra piede e terreno (o tra scarpa e terreno) per la componente normale della reazione, eguale, come si è detto, al peso del corpo, si ottiene una valutazione di questa forza in modulo direzione e verso. In questo caso sarà possibile costruire il poligono delle tre forze, risolvendo il problema. La costruzione della Fig. 8.26, mostra come la forza diretta secondo l'asse della tibia è circa tre volte il peso del corpo e la forza muscolare del complesso soleo-gastrocnemio è pari ad oltre il doppio. Per l'equilibrio del complesso tibia-perone, considerato, per semplicità come un'unica asta, si ragiona nel modo seguente. L'asta, Fig. 8.27, viene idealmente separata, nelle articolazioni del ginocchio e della caviglia, inserendo le rispettive reazioni vincolari. La reazione nella caviglia è stata determinata con la costruzione grafica appena illustrata.

Nelle figure precedenti è stata chiamata R_g la reazione nell'articolazione del ginoc-

 Image 856

 Image 857

 Image 858

8.3 Applicazione dei principi della statica alla biomeccanica

251

Fig. 8.27. Equilibrio del complesso tibia-perone

Fig. 8.28. Le azioni sulla rotula

Fig. 8.29. Equilibrio del femore

chio, F_p la forza nel tendine patellare, R_t la reazione nell'articolazione tibio-tarsica (caviglia), F_{gs} la forza dovuta all'azione combinata del soleo e del gastrocnemio. Per terminare l'analisi occorre valutare le azioni nella patella, considerata come segmento indipendente in equilibrio. Le forze sono, quella del tendine patellare, valutata in precedenza F_p , la reazione del condilo femorale R_p , nota solo in direzione, la forza esercitata dal quadricipite F_q , di cui è nota la direzione. Anche in questo caso si è semplificato, assumendo che l'altro capo del quadricipite sia connesso alla diafisi femorale, cosa non corretta, perché uno dei capi del quadricipite si connette alla pelvi.

Per terminare, esaminiamo la situazione del femore rappresentato schematicamente in Fig. 8.29. Le azioni presenti sono quelle del quadricipite F_q , con l'eccezione del retto femorale che è collegato alla pelvi, la reazione sull'articolazione coxo-femorale (testa del femore-acetabolo) R_a , la reazione sul ginocchio R_g , calcolata in precedenza, la reazione patellare R_p . Analisi più complesse, per tener conto della complessità

 Image 859

 Image 860

 Image 861

 Image 862

 Image 863

252

8 Elementi di statica

e della molteplicità delle forze muscolari, possono essere svolte mediante sistemi di modellazione meccanica, che rappresentino in modo accurato le strutture ossee e quelle muscolari.

Il piede come elemento strutturale

In Fig. 8.30 il piede è appoggiato al suolo e caricato in corrispondenza dell'articolazione con la tibia. Anche in questo caso, potremo tracciare il suo diagramma di corpo libero, cioè definire la coppia di reazioni vincolari che fanno equilibrio al carico da-to. Lo schema statico è quello di una trave appoggiata in due punti e soggetta ad un carico verticale. Nella figura abbiamo tratteggiato i vincoli per mostrare come questi siano stati sostituiti dalle corrispondenti reazioni vincolari. Il calcolo delle reazioni nel calcagno e nella pianta del piede è del tutto agevole:

R1

$$R1 = Fb$$

$$R2 = Fa$$

$$= b .$$

(8.3.11)

$$a + b$$

$$a + b$$

R2

a

La reazione in corrispondenza del calcagno è notevolmente più elevata di quella sulla pianta. Questo dipende dalla morfologia del piede, essendo la linea d'azione del carico più vicina al calcagno. Il piede è sollecitato a flessione con sforzi interni di compressione nella parte superiore e di trazione in quella inferiore. Poiché la struttura del piede non è monolitica, essendo questo costituito da una catena di elementi ossei, risulta che le ossa situate nella parte superiore tendono a chiudere il gioco nella zona di separazione, tendono ad aprirlo, invece, nella parte inferiore. Alla resistenza dell'arco plantare contribuisce la fascia muscolare plantare che agisce in modo analogo alla catena negli archi strutturali. Il fatto di

assumere forze concentrate in corrispondenza del calcagno e della pianta è, com'è evidente, una notevole semplificazione. Le due forze di reazione non sono altro nella realtà, che le risultanti di un **Fig. 8.30**. Il piede come trave appoggiata

8.3 Applicazione dei principi della statica alla biomeccanica 253

sistema di pressioni che agiscono sulle zone di contatto. Questa distribuzione di pressioni gioca un ruolo fondamentale nella riduzione delle sollecitazioni nelle ossa del piede. Nella corsa, nel salto e in altri movimenti, che comportano il trasferimento di carichi elevati in corrispondenza del calcagno, la presenza di un cuscino ripartitore ed equilibratore delle pressioni permette di evitare sollecitazioni nell'osso superiori a quelle ammissibili. Un'analisi più accurata della struttura del piede mostra che questo è costituito da una catena di "conci", per usare il linguaggio dell'ingegneria civile, che seguono il profilo di un arco. Senza entrare in dettagli sull'analisi delle strutture ad arco, non consona al carattere di questo testo, possiamo dire che il piede si comporta come un arco con catena, quest'ultima rappresentata dalla fascia plantare. È

evidente l'importanza di una corretta conformazione dell'arco plantare, sia dal punto di vista strutturale, che da quello cinematico. La struttura ad arco così individuata si comporta, infatti, come una struttura elastica, favorendo l'assorbimento delle forze dinamiche, attraverso il potere smorzante dei giunti coinvolti. Nella corsa e nella deambulazione lenta, la zona più esposta a carichi elevati è il calcagno. Nella corsa è il primo punto di contatto, nella ricaduta dopo la fase di volo. I carichi in questa fase sono molto elevati, e difficilmente prevedibili, se non in prima approssimazione, attraverso un modello. È invece relativamente agevole la misura sperimentale, attraverso l'inserzione nel tallone della calzatura di speciali solette sensorizzate. La tecnologia legata alla progettazione delle calzature per le attività sportive e il tempo libero ha preso nella giusta considerazione il problema del contenimento dei carichi dinamici, con diverse soluzioni che vanno dal cuscinetto d'aria nel tallone, ai sistemi di molle etc. Sistemi di questo tipo presentano diversi vantaggi. Infatti, oltre a garantire un effetto ammortizzante delle forze dinamiche, permettono anche di recuperare una parte, seppur piccola, dell'energia cinetica, che altrimenti

andrebbe irrimediabilmente persa. Si lascia a studi specialistici un approfondimento di questi interessanti problemi.

Appoggio monopodalico

Durante la deambulazione o lo stazionamento, il contatto col suolo avviene per un certo tempo su un solo piede. In questa fase la gamba poggiata sopporta tutto il peso del corpo, più eventuali carichi dinamici, che possono raggiungere 4–5 volte il peso corporeo. Osserviamo quello che succede in posizione di equilibrio di stazionamento. Cominciamo a notare che, considerando il diagramma di corpo libero dell'intero corpo, i carichi esterni si riducono a due, il peso del corpo e la reazione del terreno.

Durante la deambulazione questi carichi non hanno in genere la stessa linea d'azione, si osservi ad esempio la Fig. 8.31. Per cercare l'equilibrio il bacino ruota intorno all'articolazione dell'anca e il tronco si inclina verso il piede appoggiato. In corrispondenza dell'anca vediamo che, oltre alla reazione nell'articolazione è presente una forza muscolare, dovuta alla fascia ileo-tibiale, che reagisce alla tendenza del bacino a crollare dalla parte non appoggiata. Le forze agenti sulla gamba poggiata sono la reazione del terreno $R = W = W_1 + W_2$, la forza muscolare degli abduuttori dell'anca, la reazione nell'articolazione R_a e il peso proprio W_2 . Il poligono delle forze è mostrato nella Fig. 8.31c. Se sommiamo vettorialmente le due forze W_1 e W_2 ,

 Image 864

254

8 Elementi di statica

Fig. 8.31. Appoggio monopodalico: a) equilibrio dell'intero corpo; b) equilibrio della gamba; c) diagramma di corpo libero della gamba

la gamba è soggetta solo a tre forze che, per l'equilibrio, dovranno avere le linee d'azione che passano per uno stesso punto. Grazie a questa proprietà potremo determinare, analiticamente o graficamente, la reazione nell'anca e la forza muscolare. Per costruire il triangolo delle forze si tenga presente

che la direzione della FM è nota, la direzione della RA è determinata dalla condizione d'incontro delle linee d'azione, prima detta. La costruzione mostra che la reazione nell'articolazione può essere alquanto superiore al peso del corpo. Questo giustifica quanto affermato in precedenza.

La soluzione analitica passa attraverso la scrittura delle tre equazioni di equilibrio: $FM \cos \theta - RA \cos \alpha = 0$

(8.3.12)

$$FM \sin \theta - RA \sin \alpha - W_1 - W_2 = 0$$

$$FM \sin \theta \cdot x_M - FM \cos \theta \cdot y_M - RA \sin \alpha \cdot x_Q + RA \cos \alpha \cdot y_Q - W_2 x_K = 0 .$$

Il sistema scritto contiene le incognite FM, RA, $\cos \alpha$, mentre si ricorderà che θ è noto.

Equilibrio del tronco

L'equilibrio del tronco s'impone facilmente considerando che anche su questo agiscono tre forze concorrenti. Si osservi che la W_1 , forza peso del corpo senza la gamba appoggiata, ha una linea d'azione che si trova a destra della mezzeria del corpo. La posizione del baricentro del corpo, esclusa la gamba appoggiata è nota o comunque può essere facilmente calcolata, mentre la forza del muscolo ileo-tibiale è stata calcolata prima. La determinazione della reazione RA può quindi procedere, per via grafica o analitica.

 Image 865

 Image 866

 Image 867

 Image 868

 Image 869

 Image 870

 Image 871

 Image 872

8.3 Applicazione dei principi della statica alla biomeccanica

255

FM

RA

W1

Fig. 8.32. Equilibrio del tronco

Esercizi

Attrito

1.

Trovare il peso WB da applicare per ottenere una trazione FP di 30 N agente sulla colonna nei seguenti casi:

-

trazione esercitata parallelamente al piano del lettino;

-

trazione esercitata con una inclinazione di 10 gradi rispetto al piano del lettino.

Caso 1. Trazione esercitata parallelamente al piano del lettino $W = 50$ [N]

Peso della testa

$$FP = 30 \text{ [N]}$$

Resistenza opposta dalla colonna

$$; = 0,17$$

Coefficiente di attrito – piano appoggio

$$;1 = 0,1$$

Coefficiente di attrito – fune

$$H = 90^\circ$$

Rotazione carrucola

$$0 = 0^\circ$$

Angolo di inclinazione della forza di trazione

Analizzando in dettaglio le forze che agiscono sulla carrucola possiamo affermare che la relazione che intercorre tra il peso WB e la corrispondente forza di equilibrio TR è data da: $TR = WB$.

$$e(;1 \cdot H)$$

 Image 873

 Image 874

 Image 875

 Image 876

 Image 877

256

8 Elementi di statica

È possibile calcolare il valore di TR imponendo l'equilibrio al sistema di forze agenti sulla sola testa – come rappresentato in figura sotto. Noto TR è possibile allora risolvere il problema.

$$TR = W \cdot \mu + FP = 50 \cdot 0,17 + 30 = 38,5 \text{ [N]}$$

W

)

$$R = TR \cdot e(\mu_1 \cdot H) = 38,5 \cdot e(0,1 \cdot 1 \cdot 2) = 45 \text{ [N]}$$

dove il prodotto $W \cdot \mu$ è pari alla forza d'attrito T – prodotto tra la componente perpendicolare delle forze agenti sulla testa ed il coefficiente di attrito.

Caso 2. Trazione esercitata con una inclinazione di 10 gradi rispetto al piano del lettino $W = 50 \text{ [N]}$

Peso della testa

$$FP = 30 \text{ [N]}$$

Resistenza opposta dalla colonna

$$\mu = 0,17$$

Coefficiente di attrito – piano appoggio

$$\mu_1 = 0,1$$

Coefficiente di attrito – fune

$$H = 100^\circ$$

Rotazione carrucola

$$\theta = 10^\circ$$

Angolo di inclinazione della forza di trazione

Soluzione

$$TR \cdot \cos(0) = (W - TR \cdot \sin(0)) \cdot ; + FP \rightarrow TR = 38,6 \text{ [N]}$$

W

·>))

$$B = TR \cdot e(1 \cdot H) = 38,5 \cdot e(0,1 \cdot (100$$

180

$$= 45,88 \text{ [N]}.$$

 Image 878

 Image 879

 Image 880

 Image 881

 Image 882

8.3 Applicazione dei principi della statica alla biomeccanica

257

Calcolo dell'attrito nell'articolazione tibio-astragalica

2.

Calcolare la forza F1 che deve essere esercitata sul tendine di Achille dai muscoli della gamba – gastrocnemio – prima che l'articolazione cominci a muoversi. L'articolazione tibio-astragalica ed il sistema di forze corrispondenti sono rappresentate in figura sopra.

La complessa morfologia dell'articolazione è stata notevolmente semplificata al fine di rendere più agevoli i calcoli.

$$a = 6$$

[cm]

$$r = 2,8$$

[cm]

$$\mu = 0,015$$

$$P = 500$$

[N]

Soluzione. Il movimento avviene non appena viene superata la condizione di equilibrio $F_1 \cdot (a - x) = P \cdot x$ e l'angolo θ è pari ad un certo angolo critico L oltre il quale la forza trasmessa dal tendine di Achille è tale da superare l'attrito dell'articolazione.

$$\tan(\theta) = \tan(L).$$

Sotto l'ipotesi di piccoli angoli possiamo supporre che: $x = r \cdot \tan(\theta) = r \cdot \sin(\theta)$ e così $\tan(\theta) \approx \sin(\theta) = x / r$.

r

I valori di F_1 e di x non sono noti e vanno quindi calcolati come segue: $x = \mu \cdot r = 0,015 \cdot 0,028 = 0,00042$ [m]

$$(\mu \cdot r \cdot P)$$

$$F_1 =$$

$$= 0,21 =$$

(

3,5 [N].

a - ; · r)

0,059

 Image 883

258

8 Elementi di statica

3.

Calcolo delle forze muscolari T1 e T2 necessarie per mantenere in equilibrio la gamba $\theta_1 = 45^\circ$.

$\theta_2 = 90^\circ$

$\theta_1 = 15^\circ$

$\theta_2 = 5^\circ$

$a = 0,20$ [m]

$W_0 = 540$ [N]

$W_1 = 60$ [N]

$W_2 = 30$ [N]

Soluzione. Ipotesi semplificative.

Geometria del sistema Coscia-Gamba:

•

uguale lunghezza – L – per entrambi gli arti pari a 0,50 [m];

•

i baricentri di ogni segmento si trovano a $L / 2$ della loro lunghezza.

Fasce muscolari:

•

M1 è rappresentativo dei muscoli posteriori della coscia composti da: bicipite femorale, muscolo semitendinoso e muscolo semimembranoso;

•

M2 è invece rappresentativo del quadricipite femorale composto da: retto femorale, vasto mediale, vasto laterale e vasto intermedio;

•

per la coscia, le inserzioni muscolari si trovano a $L / 3$ rispetto al grande trocantere e $L / 3$ rispetto al condilo femorale. Per la gamba invece l'attaccatura del tendine rotuleo si trova a $L / 3$ rispetto al condilo tibiale.

Reazioni al terreno e forze esterne

Sul sistema in esame agiscono sia le forze peso W_0 , W_1 e W_2 che le reazioni del terreno RC_1 e RC_2 . Queste forze devono in ogni istante trovarsi in equilibrio tra loro. Scrivendo l'equilibrio delle componenti verticali e quello dei momenti.

$$\sum F_Y = RC_1 + RC_2 = - W_0 - W_1 - W_2 = 0$$

$$\sum M(\text{caviglia}) = a \cdot RC_2 - x_{PW1} \cdot W_1 - x_{PW2} \cdot W_2 .$$

Note le coordinate baricentriche dei punti di applicazione delle forze peso W_1 e W_2 il problema è ben posto e si avrà il numero sufficiente di relazioni indipendenti per risolvere

 Image 884

 Image 885

 Image 886

 Image 887

 Image 888

 Image 889

8.3 Applicazione dei principi della statica alla biomeccanica

259

l'intero sistema. Il primo passo da compiere è il calcolo della geometria dei baricentri e delle inserzioni muscolari. Il metodo impiegato è quello delle matrici di trasformazione.

Le coordinate assolute di tutti i punti si trovano risolvendo i seguenti prodotti matriciali.

{

}

{

}

|

| +

+

{ 0 , 1768 |

|

}

|

|

{ 0, 1179 |

|

|

0

- 0, 1768

- 0, 1179

P

0

$W1 = 0$

$1T \cdot PW1 = |$

$PM1 = 0$

|

$1T \cdot PM1 =$

|

0

|

|

J

|

|

l

0

|

|

J

1

1

[

]

[

]

|

|+

{ 0, 2357 |

|

}

|

|

{ 0,2357 |

|

{

0

- 0,2357

- 0,4714

P

0

M2 = 0

1T · PM2 = |

PM2 = 0

|

2T · PM2 =

{

0

|

|

J

|

|

┌

0

|

|

└

1

1

┌

└

|

|

{ 0,1768 |

|

└

0

- 0,5303

PW2 = 02T · PW2 = |

|

┌

0

|

|

J

1

dove:

{ }

{ }

{ }

{ }

{ }

| L

L

L

L

|

2

{ |

| |

| L |

| |

| |

2 |

{

|

{ 3 |

{

|

{ 3 |

{

|

{ 3 |

{

|

{ 2 |

{

0

0

0

0

0

PW1 = 1 |

PM1 =

PM2 =

PM2 =

PW2 =

.

|

{ 0 |

|

J

|

|

{ 0 |

|

J

|

|

{ 0 |

|

J

|

|

[0|

|

J

|

|

[0|

|

J

1

1

1

1

1

Una volta noti i punti di applicazione delle forze muscolari e delle forze peso, si risolve l'equilibrio del sistema da cui:

$$RC = RC = 550,43$$

[N];

$$MC = RC^2 \cdot a = 15,91 \text{ [N} \cdot \text{m]}.$$

Consideriamo ora l'azione di M1 a cui corrisponde una la forza muscolare T1. In questa configurazione il numero d'incognite è maggiore del numero di equazioni. È quindi necessario suddividere il sistema in due parti. Il taglio viene fatto in corrispondenza del ginocchio.

Una volta “aperta” la struttura si evidenziano reazioni HG e VG tra il piatto tibiale ed il condilo femorale e la forza muscolare T2 che corrisponde all'attività di M2. Imponendo nuovamente l'equilibrio alla rotazione e alla traslazione dei due sottosistemi possiamo ricavare:

 Image 890

 Image 891

 Image 892

 Image 893

 Image 894

 Image 895

 Image 896

260

8 Elementi di statica

Sistema Coscia:

$$(Coscia) \sum F_X = H_g - T_1 \cos(\theta_1 - \theta_{11}) + T_2 \cos(\theta_1 - \theta_{12}) .$$

Sistema Gamba:

$$(Gamba) \sum F_X = - H_g + T_2 \cos(\theta_2 - \theta_{12})$$

$$(Gamba) \sum F_Y = - V_g + T_2 \sin(\theta_2 - \theta_{12}) - W_2 + R_C$$

$$(Gamba) \sum M(anca) = MC - W_2 \cdot L \cdot \cos(45) - V_g \cdot L \cdot \cos(45) + H_g \cdot L \cdot \sin(45) -$$

2

$$- T_2 \cdot 2 L \cdot \cos(45) - 1$$

$$L \cdot \sin(45) - 1$$

3

$$2) \cdot \cos(45) + T_2 \cdot 2$$

3

$$2) \cdot \sin(45) .$$

Risolvendo il sistema otteniamo:

$$V_g = 8176 \text{ [N]}$$

$$H_g = 9134 \text{ [N]}$$

$$T_2 = 11925 \text{ [N]}$$

$$T_1 = 21095 \text{ [N]}.$$

Lavoro ed energia

4.

Un giocatore di basket si flette prima di saltare e in a) il suo baricentro ha una velocità costante nel momento in cui i suoi piedi lasciano il suolo, e in b) raggiunge la massima altezza. Se il saltatore riesce a sollevare il suo baricentro di 1 m calcolare la velocità v_0

del suo baricentro nella posizione a).

Risposta. $v = 4,43 \text{ m/s}.$

Soluzione. Quando il giocatore raggiunge con il suo baricentro la massima quota rispetto a quella di partenza la sua energia cinetica è nulla e l'energia potenziale è massima. Se si assume il sistema come conservativo si ha:

1

$\sqrt{$

$$mv^2 = mgh$$

$v =$

$$\sqrt{2gh} =$$

$$\sqrt{2 * 9,81 * 1} = 4,42 \text{ m/s}.$$

2

5.

Una scala mobile di un grande magazzino movimentata un carico di 30 persone al minuto portandole dal primo al secondo piano e superando un dislivello di 7 m. La persona media ha una massa di 65 kg. Se il motore che potenzia l'unità ha una potenza di 3 kW, si calcoli il rendimento meccanico del sistema, cioè il rapporto tra energia spesa e lavoro svolto.

Risposta. $\eta = 0,74$.

 Image 897

 Image 898

 Image 899

 Image 900

 Image 901

 Image 902

8.3 Applicazione dei principi della statica alla biomeccanica

261

6.

Un saltatore con l'asta, di massa pari a 80 kg, porta un'asta lunga 4,9 m di massa 4,5 kg, con velocità v e riesce a superare l'asticella a 5,5 m. Nel momento in cui passa l'asticella, la sua velocità e quella dell'asta sono essenzialmente nulle. Calcolare il minimo valore possibile di v per riuscire nel salto. Il sistema saltatore-asta ha un baricentro che si trova 1,1 m sopra il suolo al momento della rincorsa.

Soluzione. Se si suppone il sistema conservativo l'energia cinetica del saltatore si converte in energia potenziale e si calcola la quota y_G del baricentro del sistema saltatore-asta al passaggio dell'asticella si ottiene:

1

$$y_G = 80 * 5,5 + 4,5 * 2,45 = 5,34$$

$$(80 + 4,5) * v^2 = 84,5 * 9,81 * (5,34 - 1,1) \quad 84,5$$

2

$v =$

$$2 * 9,81 * 4,24 = 9,12, \text{ m/s.}$$

Un paracadutista con equipaggiamento completo ha peso $P = 1000 \text{ N}$. determinare il diametro del paracadute necessario affinché la velocità di discesa sia pari a 4 m/s , assunto un coefficiente di resistenza aerodinamica $C_R = 1,1$ e la densità dell'aria $\rho = 1,19 \text{ kg/m}^3$.

 Image 903

 Image 904

 Image 905

8 Elementi di statica

7.

Il carico P trasportato con la carriola in figura è pari a 600 N. Note le dimensioni a =

380 mm e b = 800 mm determinare la forza verticale F esercitata sui manici della carriola e la forza N trasmessa dalla ruota al terreno, quando la carriola è ferma nella posizione indicata.

Soluzione. È sufficiente scrivere l'equilibrio dei momenti rispetto al punto O: $P \cdot a - F(a + b) = 0$

$$F = P \cdot 0,38 = 193,22 \text{ N}.$$

1,18

8.

Piegamenti sulle braccia

Calcolare le reazioni vincolari sui punti d'appoggio ed il lavoro necessario per compiere 30 piegamenti sulle braccia ed il corrispondente consumo metabolico richiesto.

$$F = 76,45 \text{ [Kg]}.$$

Soluzione. Sistema d'equazioni per l'equilibrio

$$\sum R_X = 0;$$

$$0 = 0$$

$$\sum R_Y = 0;$$

$$R_{Y1} + R_{Y2} \cdot F = 0$$

$$\Sigma M(0) = 0;$$

$$- 0,45 \cdot F + 1,45 \cdot RY2 = 0.$$

Componenti incognite delle reazioni del terreno.

$$RY1 = 51,24 \text{ [N]}$$

$$RY2 = 232,75 \text{ [N]}.$$

Calcolo del lavoro per i piegamenti sulle braccia.

$$L(1) = m \cdot g \cdot h = 70 \cdot 9,81 \cdot 0,20 = 150 \text{ Joule} \quad L(30) = 30 \cdot L(1) = 4500 \text{ Joule}.$$

 Image 906

 Image 907

 Image 908

 Image 909

 Image 910

 Image 911

 Image 912

 Image 913

 Image 914

 Image 915

 Image 916

8.3 Applicazione dei principi della statica alla biomeccanica

Ricordando che una grande caloria [Cal] è pari a 4186 J, l'energia termica corrispondente è: $4500 = 1,075 \text{ Cal}$.

4186

Ipotizzando un rendimento metabolico circa del 10% l'energia metabolica richiesta è pari a 10,750 Cal.

Tabella 8.1. Coefficienti d'attrito volvente

Materiali

f_v

Ruote d'acciaio su acciaio (superfici lucide)

0,0005–0,002

Pneumatici su strada asfaltata, carichi tra 1000 e 5000 N e

0,08-0,012

pressione di gonfiaggio di 200 kPa

Pneumatici su cemento

0,018–0,035

Pneumatici su sabbia compatta

0,013–0,016

Pneumatici su sabbia non compatta

0,18–0,45

Tabella 8.2. Coefficienti d'attrito radente

Materiali

fa

f

Acciaio/Acciaio – Sup. asciutte – senza lubr.

0,78

0,42

Acciaio/Acciaio - In presenza di lubrificante

0,12–0,2

0,06–0,085

Acciaio/Acciaio - In presenza di grafite

0,12

0,058–0,07

Acciaio/Acciaio - Con bisolfuro di molibdeno

0,10

0,033–0,05

Acciaio/ghisa – Superfici asciutte

0,40

0,23

Acciaio/bronzo fosforoso

Superfici asciutte

0,40–0,23

Superfici lubrificate

0,1–0,15

0,04–0,07

Acciaio/ottone – superfici asciutte

0,51

0,44

Acciaio/rame – Superfici asciutte

0,53

0,36

Acciaio/Alluminio – Superfici asciutte

0,61

0,47

Acciaio/legno – Superfici asciutte

0,4–0,65

Ghisa/legno – Superfici asciutte

0,29–0,80

Legno/legno – Superfici asciutte

0,54–0,62

0,42–0,48

Ottone/legno

0,48

Mattone/legno

0,3–0,4

Acciaio/smeriglio

0,28–0,5

Acciaio/ghiaccio

0,30

0,035

Ottone/ghiaccio

0,075

Vetro/vetro

0,94

0,40

Rame/vetro

0,68

0,58

Acciaio/sughero

0,45

 Image 917

 Image 918

 Image 919

 Image 920

 Image 921

 Image 922

 Image 923

 Image 924

 Image 925

 Image 926

 Image 927

264

8 Elementi di statica

Materiali

fa

f

Acciaio/teflon

0,04

Acciaio/pietra

0,3–0,7

Ghisa/cuoio

0,50

Pneumatici/asfalto(asciutto), valore medio

0,75

0,6

Solidi su gomma

1–4

Tabella 8.4. Densità dei materiali

Materiali metallici

Acciaio

7830

Leghe di Al

2700–2800

Leghe di magnesio

1770–1830

Leghe di titanio

4450–4730

Ottone

8400–8900

Bronzo

7500–9000

Leghe di nickel

8030–8880

Leghe di berillio

1855

Materiali non metallici

Laminati plastici

1200–2200

Elastomeri

1900–1950

Grafite

1400–1900

Resine epossidiche

1850

Policarbonati

1200–1510

Poliesteri

1060–1460

Nylon

1090–1140

Polistirene

1040–1070

Polietilene

920–960

Gomma naturale

930

Polipropilene

910

 Image 928

 Image 929

 Image 930

9

Dinamica

9.1 Dinamica del punto materiale

Riportiamo le leggi della dinamica osservando che la formulazione Newtoniana era scalare mentre la meccanica moderna le esprime in modo vettoriale. Ci si riferisce inizialmente ad un punto materiale.

1) *Un punto materiale conserva il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché non interviene una forza a perturbare questo stato. Reciprocamente se un punto è in quiete o in moto rettilineo uniforme la risultante delle forze ad esso applicate è nulla.*

$$\sum \mathbf{F}_i = 0 .$$

(9.1.1)

2) *Se su un punto materiale agisce un sistema di forze con risultante non nulla, l'accelerazione assunta dal punto è un vettore con la stessa direzione*

del risultante

|

delle forze agenti sul corpo e con modulo pari a $\sum \mathbf{F}_i$ | = R

m

m

$$\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$$

(9.1.2)

che può essere scritta ricordando il principio di d'Alembert, introducendo la forza d'inerzia $- m \mathbf{a}$ al primo membro, come un'equazione di equilibrio. L'equazione scritta in questa forma prende il nome d'equazione d'equilibrio dinamico

$$\sum \mathbf{F}_i - m\mathbf{a} = 0 .$$

(9.1.3)

3) Ad ogni azione esercitata da un corpo su un altro corrisponde una reazione eguale e contraria alla prima.

9.2 Quantità di moto e momento della quantità di moto

Si definisce quantità di moto di un punto materiale il prodotto $m\mathbf{v}$ della massa del punto per la sua velocità:

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{v} .$$

(9.2.1)

Ricordiamo che la quantità di moto è un vettore.

Picasso B.: Fondamenti di Meccanica e Biomeccanica. Meccanica dei corpi rigidi articolati.

 Image 931

 Image 932

 Image 933

 Image 934

 Image 935

 Image 936

 Image 937

266

9 Dinamica

Se torniamo al secondo principio della dinamica, impiegando la definizione della quantità di moto possiamo scrivere:

$$\Sigma$$
$$d\mathbf{v}$$
$$\mathbf{F}_i = m\mathbf{a} = m$$
$$= d\mathbf{Q} .$$

(9.2.2)

$$dt$$
$$dt$$

L'equazione precedente mostra che la risultante delle forze applicate a un punto materiale è eguale alla derivata della sua quantità di moto. Se il punto

è soggetto ad un sistema di forze equilibrato, o non vi sono forze esterne, si ha:

$$\sum \mathbf{F}_i = d\mathbf{Q} = 0 \rightarrow \mathbf{Q} = \text{cost.}$$

(9.2.3)

dt

Se su un punto materiale agisce un sistema di forze equilibrato, la sua quantità di moto si mantiene costante. Quando invece la risultante $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{R}$ delle forze esterne è diversa da zero, ricordando che:

" t

^

R =

R dt

(9.2.4)

0

è l'impulso della forza **R**, si ha:

"

"

t

t d**Q**

R dt =

$$dt = \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1$$

(9.2.5)

0

o

dt

l'impulso totale, in un intervallo di tempo t, delle forze agenti su un punto materiale è eguale alla variazione della sua quantità di moto nello stesso intervallo.

Le quantità che compaiono negli integrali della (9.2.5) sono vettori che possono cambiare nell'intervallo considerato in modulo e direzione. In questi casi è opportuno convertire l'equazione vettoriale scritta in tre equazioni scalari:

"

"

t

t dQx

Rxdt =

dt = Qx2 - Qx1

0

0

dt

"

"

t

t dQy

Rydt =

$$dt = Qy2 - Qy1$$

0

0

dt

"

"

t

t dQz

Rzdt =

$$dt = Qz2 - Qz1 .$$

(9.2.6)

0

0

dt

Si definisce momento della quantità di moto di un punto materiale P rispetto ad un qualunque polo O la quantità:

$$\mathbf{H} = \mathbf{OP} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} .$$

(9.2.7)

Considerando O come origine degli assi di riferimento, le componenti del vettore OP non sono altro che le coordinate x , y , z del punto, per cui le equazioni scalari corrispondenti alla (9.2.7) sono le seguenti:

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(v_{zy} - v_{yz})\mathbf{i} + m(v_{xz} - v_{zx})\mathbf{j} + m(v_{ys} - v_{xy})\mathbf{k}$$

[

]

i

j

k

$$= m \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}.$$

(9.2.8)

$v_x \ v_y \ v_z$

 Image 938

 Image 939

 Image 940

9.3 Dinamica del corpo rigido

267

Se ora consideriamo che sul punto in esame agisca un sistema di forze \mathbf{F}_i la somma dei momenti delle forze F rispetto all'origine è data dall'espressione:

$$\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{r} \times m \dot{\mathbf{v}}.$$

(9.2.9)

Derivando rispetto al tempo l'espressione di \mathbf{H} nella (9.2.8) si ottiene: $d\mathbf{H} = \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$.

(9.2.10)

dt

In quanto il primo termine della derivazione è il prodotto vettoriale di due vettori paralleli. Dalle due equazioni precedenti si trae:

$$\sum \mathbf{M}_i = \dot{\mathbf{H}}.$$

(9.2.11)

i

L'equazione scritta dice che la somma dei momenti rispetto a un punto fisso O delle forze agenti su un punto materiale è uguale alla derivata del momento della quantità di moto rispetto allo stesso punto. Insieme all'equazione (9.2.2) $\sum \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} = \dot{\mathbf{Q}}$ che stabilisce una relazione analoga tra risultante delle forze e quantità di moto la (9.2.11) fornisce uno dei mezzi più potenti per la risoluzione di problemi della dinamica, specie se estesa a sistemi di punti materiali o corpi rigidi.

9.3 Dinamica del corpo rigido

Le equazioni ricavate per un punto materiale trovano una facile estensione ai corpi di dimensione finita, aventi massa distribuita. La quantità di moto si può ottenere come somma delle quantità di moto infinitesime di tutti gli elementi di massa. Ricordando che la velocità di un punto generico è pari alla velocità di un altro punto, ad esempio il baricentro, sommata con la velocità dovuta alla rotazione del corpo intorno ad un asse passante per il baricentro, si ha:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

(9.3.1)

"

"

"

$$\mathbf{Q} =$$

$$\mathbf{v} d\mathbf{m} =$$

$$\mathbf{v} G d\mathbf{m} + \mathbf{F} \times$$

$$\mathbf{r} d\mathbf{m}$$

$$= M \mathbf{v} G$$

(9.3.2)

M

M

M

"

in quanto

$$\mathbf{r} d\mathbf{m} = 0 .$$

M

La relazione precedente dice che la quantità di moto di un corpo esteso è uguale al prodotto della sua massa per la velocità del suo baricentro. Il secondo principio mantiene la stessa forma trovata per il punto materiale, tenendo presente la (9.3.2):

$$\Sigma$$

$$d\mathbf{v} G$$

$$\mathbf{F}_i = M$$

$$= M\mathbf{a}_G = d\mathbf{Q} .$$

(9.3.3)

dt

dt

Con l'unica variante che, per un corpo rigido, l'accelerazione da inserire nella formula è quella del suo baricentro. Ancora una volta l'equazione d'equilibrio dinamico del corpo si può scrivere:

$$\sum \mathbf{F}_i - M\mathbf{a}_G = 0 .$$

(9.3.4)

 Image 941

268

9 Dinamica

Fig. 9.1. Corpo rigido

Il momento della quantità di moto si può ottenere scegliendo come polo il baricentro:

"

"

"

"

HG =

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} dm =$$

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{v}G + \mathbf{F} \times \mathbf{r}) dm =$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v}G dm +$$

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) dm$$

M

M

M

M

"

$$= \mathbf{r} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) dm$$

M

"

"

infatti

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v}G dm = -\mathbf{v}G \times$$

$$\mathbf{r} dm = 0 .$$

(9.3.5)

M

M

Valutiamo l'ultimo termine nella (9.3.5) ricordando che il vettore \mathbf{r} ha come componenti le coordinate rispetto a un sistema di riferimento baricentrico

del generico punto del corpo in esame. Avremo quindi:

$$\left(\int \int \int \right)$$

"

"

$$\{ x \} \{ F_x \} \{ x \}$$

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) dm =$$

\

F

)

$$\int \int \int dm =$$

M

M

z

Fz

z

$$\left(\int \int \int \right)$$

)

"

$$\{ x \} \{ F_{yz} - F_{zy} \}$$

= \

F

)

$$\int_V \rho \mathbf{r} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{F}) \, dV =$$

M

z

$$F_{xy} - F_{yx}$$

[

]

$$= \int_V \rho \{ F_x(y^2 + z^2) - F_{xy} - F_{xz} \}$$

$$= \int_V \rho \{ -F_{xy} + F_y(x^2 + z^2) - F_{yz} \} \, dV =$$

M

$$- F_{xz} - F_{yz} + F_z(x^2 + y^2)$$

[

]

[]

"

$$(y^2 + z^2) - xy - xz$$

$$\{ F_x \}$$

$$= \int_V \rho \{ -xy + (x^2 + z^2) - yz \} \, dV \quad * F$$

$$\int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{F} \, dV =$$

M

$$-xz - yz + (x^2 + y^2)$$

Fz

[,

,

,

]

$$(y^2 + z^2)dm - xydm - xzdm$$

|

[]

| M

M

|

,

,

,

{ Fx }

= |

$$| -xydm + (x^2 + z^2)dm - yzdm | Fy =$$

[

|

M

M

M

{ }

,

,

,

] F

-

z

$$xzdm - yzdm + (x^2 + y^2)dm$$

M

M

M

9.3 Dinamica del corpo rigido

269

[

] []

J_{xx}

$$- J_{xy} - J_{xz} \{ F_x \}$$

$$= \int - J$$

]

y_x

J_{yy}

$- J_{yz}$

$$F_y = \mathbf{JGF} .$$

(9.3.6)

-

[]

J_{zx}

$- J_{zy}$

J_{zz}

F_z

La (9.3.5) diventa quindi:

"

"

$$\mathbf{HG} =$$

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) dm =$$

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dm = \mathbf{JGF} .$$

(9.3.7)

M

M

Si tenga presente che nell'equazione precedente $\dot{\mathbf{r}}$ non è altro che la velocità relativa di un generico punto del corpo considerato rispetto al baricentro. \mathbf{JG} è il tensore d'inerzia rispetto a una terna di assi baricentrici adottati come riferimento e solidali col corpo.

Se gli assi sono principali, la matrice \mathbf{JG} è diagonale e l'espressione del momento della quantità di moto diventa:

$$\mathbf{HG} = J_{xx}F_x\mathbf{i} + J_{yy}F_y\mathbf{j} + J_{zz}F_z\mathbf{k} .$$

(9.3.8)

Dove F_x, F_y, F_z sono le componenti della velocità angolare del corpo sui tre assi di riferimento. Nel caso in cui nel corpo esista un punto fisso e si voglia adottare questo come polo dei momenti, possiamo scrivere una relazione analoga alla (9.3.5):

"

"

"

$$\mathbf{H}_O =$$

$$\mathbf{r}_O \times \mathbf{v}_{dm} =$$

$$\mathbf{r}_O \times (\mathbf{v}_O + \mathbf{F} \times \mathbf{r}_O)dm =$$

$$\mathbf{r}_O \times (\mathbf{F} \times \mathbf{r}_O)dm = \mathbf{JOF} .$$

M

M

M

(9.3.9)

Essendo $\mathbf{v}_O = 0$.

Le espressioni ottenute per per il momento angolare prendendo come polo il baricentro o un punto fisso del corpo sono formalmente identiche.

L'unica differenza è nel tensore d'inerzia che deve essere calcolato rispetto agli assi appropriati nei due casi. Se deriviamo rispetto al tempo la (9.3.7) si ha:

"

"

"

.

$\mathbf{H}_G =$

$\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} dm +$

$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} dm =$

$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} dm = \sum \mathbf{M}_G = \mathbf{J}_G \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{F} \times \mathbf{J}_G \dot{\mathbf{F}} . (9.3.10) M$

M

M

L'ultimo termine dell'equazione (9.3.10) deriva dal fatto che la derivata è espressa rispetto ad un sistema di assi baricentrici mobili col corpo in esame. Il vettore $\mathbf{J}_G \dot{\mathbf{F}}$

varia quindi in modulo e direzione. Si ricordino a questo proposito le regole di derivazione dei vettori. Esprimiamo ora la derivata di \mathbf{H}_O rispetto al tempo. Abbiamo in questo caso:

"

"

"

.

\mathbf{H}_O

$\dot{\mathbf{r}}_O \times \dot{\mathbf{r}}_{dm} +$

$\mathbf{r}_O \times \ddot{\mathbf{r}}_{Odm} =$

$\mathbf{r}_O \times \ddot{\mathbf{r}}_{Odm} = \sum \mathbf{M}_O = \mathbf{J}_O \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{F} \times \mathbf{J}_O \dot{\mathbf{F}} .$

M

M

M

(9.3.11)

Anche in questo caso, pur essendo O un punto fisso la derivata è espressa rispetto ad assi mobili, solidali col corpo. Introducendo l'impulso del momento risultante rispetto al baricentro o a un polo fisso si ha:

" t

^

$\mathbf{M}_R =$

$\mathbf{M}_R dt .$

(9.3.12)

0

 Image 942

 Image 943

270

9 Dinamica

Quindi:

"

"

t

t

^

dH

MR =

MRdt =

dt = H2 - H1 .

(9.3.13)

0

0

dt

L'impulso, nell'intervallo di tempo t , del momento risultante delle forze e coppie agenti sul sistema è eguale alla variazione del momento della quantità di moto del sistema stesso.

Riassumendo, per un corpo rigido si ha:

La risultante di tutte le forze esterne e reazioni vincolari agenti sul sistema e la risultante delle forze d'inerzia formano un sistema equilibrato:

$$\sum \mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0} .$$

(9.3.4)

Il momento risultante di tutte le forze, coppie esterne e reazioni vincolari rispetto ad un polo coincidente col baricentro, e il momento risultante delle forze d'inerzia formano un sistema equilibrato.

$$\sum \mathbf{M}_G - \mathbf{J}_G \cdot \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{F} \times \mathbf{J}_G \mathbf{F} = \mathbf{0} .$$

(9.3.10.bis)

Sono frequenti i casi in cui il terzo termine dell'ultima equazione si azzerava per il parallelismo dei due vettori nel prodotto vettoriale. Questo accade ad esempio negli esempi presentati sotto.

Esempio 9.1 (Moto di una ruota su una guida sotto l'azione di una forza costante nel suo centro). Dopo avere sostituito i vincoli con le relative reazioni possiamo scrivere le equazioni di equilibrio, ricordando che le azioni d'inerzia sono costituite da una forza ed una coppia risultanti. Come ipotesi di lavoro assumiamo che il moto sia di puro rotolamento, ipotesi che implica la proporzionalità tra accelerazione angolare e della ruota e accelerazione lineare del suo centro.

$$N - P = 0$$

$$F - T - m \ddot{x} = 0$$

$$N u + J \ddot{\theta} - T R = 0$$

$$\ddot{x} = \ddot{H}R$$

(9.3.14)

Fig. 9.2. Moto di una ruota su una guida piana

 Image 944

 Image 945

 Image 946

 Image 947

 Image 948

9.3 Dinamica del corpo rigido

271

da cui si ha:

$$N = P$$

$$(FR - Pu)$$

$$T = F - m \ddot{H}R = F - mR$$

$$= FJ + mRPu$$

$$J + mR^2$$

$$J + mR^2$$

$$J \ddot{\theta}$$

$$H + Pu - (F - m \ddot{H}R)R = 0$$

..

$$H = FR - Pu$$

$$\ddot{x} = \ddot{H}R .$$

(9.3.15)

$$J + mR^2$$

L'ultima relazione esprime l'ipotesi assunta, che il moto della ruota sia di rotolamento senza strisciamento. Questa ipotesi deve essere verificata dopo la soluzione del sistema, controllando che si abbia $T \leq f_a N$. Se l'ipotesi non fosse verificata, le prime tre equazioni restano invariate ma l'ultima deve essere sostituita dalla relazione $T = fN$ che esprime il fatto che, in presenza di strisciamento la forza tangenziale T

risulta costante e pari a fT , con f coefficiente d'attrito radente della coppia di materiali della ruota e della guida. Nel caso sia necessario ripetere la soluzione del sistema perché la verifica di moto di puro rotolamento non è soddisfatta, le equazioni sono, come si è detto:

$$N - P = 0$$

$$F - T - m\ddot{x} = 0$$

$$Nu + J\ddot{H} - TR = 0$$

$$T = fN$$

(9.3.16)

e la soluzione del sistema fornisce:

$$T = fP$$

$$\ddot{x} = \frac{F - fP}{m}$$

m

..

$$H = P(fr - u) .$$

J

Esempio 9.2 (Moto di una ruota soggetta ad una coppia motrice intorno al suo asse). Il caso precedente è tipico delle ruote trainate dei veicoli, quello presente è invece il caso delle ruote motrici. L'azione esterna è questa volta una coppia C applicata all'asse. È interessante notare che l'azione tangenziale T applicata alla ruota dal vincolo della guida è ora diretta nel senso del moto e costituisce proprio la forza che rende possibile l'avanzamento. Le equazioni del moto si scrivono in modo non molto dissimile dal caso precedente:

$$N - P = 0$$

$$T - m\ddot{x} = 0$$

$$Nu + J\ddot{\theta} + TR - C = 0$$

$$\ddot{x} = \ddot{\theta}R$$

(9.3.17)

Image 949

Image 950

Image 951

Image 952

272

9 Dinamica

Fig. 9.3. Moto di una ruota soggetta ad una

coppia motrice

per cui la soluzione è:

$$C - P_u$$

$$C - P_u$$

$$N = P$$

..

$$H = C - P_u$$

..

.

(

$$x = R \ddot{H} = R$$

$$J + mR^2)$$

$$(J + mR^2) T = m \ddot{x} = mR(J + mR^2)$$

Anche in questo caso è necessario verificare che il valore di T ottenuto non superi quello massimo, corrispondente all'inizio dello slittamento. Se questo avvenisse, occorre ripetere il calcolo sostituendo alla seconda equazione la relazione $T = fN$.

Lasciamo questo calcolo alla diligenza del lettore.

Esempio 9.3 (Moto di un corpo intorno ad un punto fisso). Ci riferiamo a un caso di moto piano, ma le leggi e le deduzioni che faremo sono del tutto generali e applicabili anche al moto spaziale con un punto fisso. Il corpo considerato è soggetto alla forza peso in direzione verticale, una forza d'inerzia, diretta in nella direzione normale ad OG e con verso opposto a quello dell'accelerazione, una coppia esterna C e la reazione

vincolare nel fulcro attorno al quale il corpo ruota. Si osservi che non è strettamente necessario “indovinare” il giusto verso della forza d’inerzia, in quanto è sufficiente adottare un verso convenzionale. Al momento della sua determinazione effettiva questa scelta sarà poi confermata o smentita in base al segno delle componenti del vettore ottenuto. Scrivendo le equazioni di equilibrio in forma scalare si ha: $H_O + m a_x = 0$

$$V_O - m a_y - P = 0$$

$$C - J \ddot{\theta}$$

$$G_H - m a_x * r_{OG} = 0$$

$$a = r$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}$$

(9.3.18)

Si tratta di quattro equazioni nelle quattro incognite H_O , V_O , a , $\ddot{\theta}$. Si osservi che nella terza equazione, usando per a l’espressione della quarta equazione, si ottiene: $C = (J$

..

$$G + m r^2$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}$$

$$r_{OG}$$

$$J_O$$

(9.3.19)

l’equazione di momento, scritta rispetto al fulcro, consente quindi di ottenere immediatamente l’accelerazione angolare e, successivamente, l’accelerazione del baricentro.

 Image 953

 Image 954

9.3 Dinamica del corpo rigido

273

Fig. 9.4. Moto di un corpo

intorno ad un punto fisso

Esempio 9.4. Rieducazione dei muscoli della coscia dopo un trauma. La Fig. 9.5 mostra uno schema della gamba durante un esercizio di riabilitazione che consiste nella flessione e distensione ripetute del ginocchio applicando un peso in corrispondenza del piede. Ricordiamo che la flessione del ginocchio viene attivata dal quadricipite i cui quattro fasci muscolari si raccordano sul tendine patellare. La forza sul tendine da generare durante la rieducazione dipende dalla velocità del movimento di flessione del ginocchio e dal peso applicato. Il diagramma di corpo libero della Fig. 9.5 mostra tutte le forze in gioco e le due componenti di reazione nell'articolazione. Si suppone che l'analisi dell'equilibrio dinamico si svolga nella posizione rappresentata in figura, definita dall'angolo H , e si suppone anche che siano noti per quella posizione l'accelerazione angolare e la velocità angolare della gamba, \dot{H} .

H , \ddot{H} . Si suppone anche di aver

determinato la posizione del baricentro della gamba G . Le equazioni di equilibrio si scrivono tenendo conto che si tratta del moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso (l'articolazione). La forma delle equazioni ricalca la (9.3.19).

$$R_{GH} - F_{MG} \cos 1 = 0$$

$$R_{GV} - W_1 - W_2 + F_{MG} \sin 1 = 0$$

$$- W_1 a \cos H - W_2 (a + b) \cos H - J \ddot{H} + F_{MG} * c = 0 .$$

(9.3.20)

Nelle equazioni (9.3.20) c è il braccio della forza muscolare FMG e J il momento d'inerzia della gamba rispetto all'articolazione del ginocchio. Le equazioni scritte permettono di ricavare facilmente RGH, RGV, FMG (di cui è nota la direzione) se il **Fig. 9.5**. Un esercizio di

riabilitazione

 Image 955

274

9 Dinamica

Fig. 9.6. Spinta di un rimorchiatore sulla

nave

problema è quelli di conoscere il valore delle reazioni e della forza muscolare per un valore dato del peso applicato W_2 . Nel caso in cui si fissasse a priori il valore ottimale della forza muscolare FMG per la rieducazione il peso W_2 diventerebbe una delle incognite al posto della forza muscolare.

Esempio 9.5. Un rimorchiatore si appoggia ad una nave in corrispondenza della poppa e la spinge con una forza nota T. Supponendo di trascurare la resistenza dell'acqua e considerando la nave inizialmente ferma, si determini l'accelerazione della nave nel baricentro e la sua accelerazione angolare.

Soluzione. Le equazioni di equilibrio dinamico devono contenere tutte le azioni esterne e d'inerzia agenti sulla nave. Si ha allora:

$$T - m\ddot{x} = 0$$

$$Tb - J\ddot{\theta}$$

$$GH = 0.$$

(9.3.21)

Le due equazioni scritte contengono due incognite "x, "

H e permettono una rapida de-

terminazione di queste quantità. L'allievo cerchi di estendere quest'applicazione al caso in cui la forza T non è perpendicolare all'asse della nave, ma obliqua.

La postura

La postura è il complesso di posizioni delle nostre articolazioni in un certo istante.

Una postura eretta ideale:

-

è stabile, nel senso che l'allineamento delle articolazioni mantiene la linea d'azione della forza peso all'interno della superficie d'appoggio dei due piedi;

-

rende minimi gli sforzi muscolari e nei tessuti connettivi, sia staticamente, che durante il movimento;

-

rende minima l'energia spesa per conservare la posizione staticamente o per eseguire il movimento.

Per valutare se la postura in posizione eretta è corretta, osserviamo che la linea d'azione della forza peso, nel piano sagittale, è disposta:

-

anteriormente all'asse dell'articolazione tibio-tarsica della caviglia, generando un momento tendente a provocare una flessione dorsale che viene compensata dall'attività dei flessori plantari (soleo e gastrocnemio);

 Image 956

9.3 Dinamica del corpo rigido

275

Fig. 9.7. Modelli posturali: a) il corpo come pendolo inverso a 2 g.d.l.; b) pendolo inverso a un g.d.l.

•

anteriormente all'asse dell'articolazione del ginocchio, generando un momento d'estensione dell'articolazione che viene contrastato dall'azione dei legamenti posteriori del ginocchio;

•

posteriormente all'asse laterale dell'articolazione coxo-femorale, generando un momento estensore dell'articolazione che è controbilanciato dall'azione dei legamenti iliofemorali.

Vediamo quindi che i momenti prodotti nelle articolazioni di caviglia, ginocchio e coxo-femorale sono contrastati passivamente da legamenti che si comportano come semplici organi elastici, senza intervento dei meccanismi di attivazione muscolare.

Questo comporta una grande rapidità nelle reazioni di riequilibrio e una assenza di tensione nella muscolatura. Sono stati proposti molti modelli meccanici della postura eretta. Uno dei più diffusi è quello del *pendolo inverso*. Ne diamo una breve descrizione nella Fig. 9.7. Ogni piccola perturbazione dell'equilibrio, la spinta del vento, la respirazione, i movimenti generati da riflessi, genera una situazione di rottura

dell'equilibrio su un sistema per sua natura instabile. L'equilibrio è ristabilito continuamente senza un intervento volontario cosciente, dai meccanismi di richiamo dei legamenti e da un loop di controllo legato ai nostri meccanismi di percezione.

Uno studio semplificato della dinamica della postura si può impostare ricorrendo al semplice modello della Fig. 9.7b. Il corpo umano è rappresentato come un pendolo inverso, articolato al piede nella caviglia. Sul corpo agiscono in condizioni dinamiche la forza peso, una coppia d'inerzia e la risultante delle azioni di pressione sul piede.

In condizioni ideali il vettore peso e il vettore risultante delle pressioni si farebbero equilibrio giacendo sulla stessa linea d'azione. Al presentarsi di una piccola perturbazione l'equilibrio si rompe e compare il termine inerziale. Le equazioni di equilibrio dinamico sono:

$$J \ddot{\theta}$$

$$H + kH = PxG - WxW .$$

(9.3.22)

Il termine elastico kH nell'equazione precedente rappresenta la reazione dei legamenti ad una rotazione del corpo-pendolo, il primo termine il momento dovuto alla

 Image 957

276

9 Dinamica

Fig. 9.8. Il sistema di controllo della postura

coppia d'inerzia che è sempre di verso opposto all'accelerazione angolare, l'ultimo termine, al secondo membro rappresenta l'azione di controllo della stabilità. È facile vedere che se il corpo oscilla in avanti le azioni muscolari e tendinee sulla caviglia devono generare una coppia che si oppone a tale movimento. Questo corrisponde ad uno spostamento in avanti della forza P ,

che genera così insieme alla W un momento raddrizzante. Il controllo della postura nel modello in esame è affidato ai flessori plantari e dorsali della caviglia (strategia di caviglia). Come in tutti i sistemi controllati la correzione può indurre un comportamento oscillatorio del sistema intorno alla posizione che si intende raggiungere. Queste azioni di continuo aggiustamento inducono un movimento caratteristico del centro di gravità (sway) all'interno di un'area tipica. Attraverso lo studio dei pattern di movimento del centro di pressione è possibile ricercare le cause dei disturbi dell'equilibrio e della propriocezione. Nel caso in cui il semplice modello presentato sia strutturato, come in Fig. 9.7b, come un doppio pendolo inverso, sarebbe possibile tener conto di un'altra strategia di controllo (strategia d'anca), basata sulla rotazione del tronco. Chiudiamo questi brevi cenni con uno schema a blocchi, Fig. 9.8, del controllo posturale.

Equazioni di Newton-Eulero

Le equazioni di Newton-Eulero sono di grande utilità nella soluzione dei problemi di dinamica diretta e inversa di sistemi articolati. Sia dato un sistema costituito da più segmenti articolati con giunti di vario tipo. Le proprietà inerziali di un generico segmento sono rappresentate dalla sua massa, dalla posizione del baricentro e dal suo tensore d'inerzia, calcolabile in base alle caratteristiche geometriche e alla densità del materiale. Se noi pensiamo di separare idealmente i vari segmenti scollegando le articolazioni e sostituendo a queste le reazioni vincolari mutue che agiscono tra segmenti contigui, otteniamo una serie di corpi liberi, in numero uguale a quello dei segmenti. Su questi agiscono le forze e coppie d'inerzia, date dalle equazioni: $\mathbf{F}_i, \mathbf{G} = m_i \mathbf{a}_i, \mathbf{G}$

$$\mathbf{M}_i, \mathbf{G} = \mathbf{J}_G \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i \times \mathbf{J}_G \mathbf{F}_i .$$

(9.3.23)

Nel seguito ometteremo per brevità l'indice G che specifica forze passanti per il baricentro e momenti calcolati rispetto a questo, lasciando soltanto l'indice i relativo al segmento considerato. Con riferimento alla Fig. 9.9, le azioni esterne (applicate

9.3 Dinamica del corpo rigido

277

$[i+1]$

\mathbf{f}_{i+1}

\mathbf{n}_{i+1}

\mathbf{F}_i

N

f

i

i

$[iG]$

\mathbf{n}_i

Fig. 9.9. Forze esterne e forze d'inerzia su un

$[i]$

segmento generico

cioè dai segmenti contigui) e quelle d'inerzia (dovute alle accelerazioni lineari e angolari del segmento) devono costituire un sistema in equilibrio. Ricordando che ove esistano diversi sistemi di riferimento le equazioni d'equilibrio devono essere espresse rispetto a un unico sistema, scegliamo di scrivere le equazioni per il segmento i nel suo sistema di riferimento e così per tutti gli altri. Per quanto riguarda le forze trasmesse da un segmento a quelli contigui definiamo \mathbf{f}_i come la forza trasmessa dal segmento $i - 1$ al segmento i in corrispondenza dell'articolazione, \mathbf{n}_i la coppia (indicata nella figura come una freccia con due punte) trasmessa sempre dal segmento $i-1$ al segmento i . Scrivendo le equazioni d'equilibrio del segmento i la forza \mathbf{f}_{i+1}

e la coppia \mathbf{n}_{i+1} trasmessa dall'elemento successivo dovranno comparire col segno negativo. Si ha allora:

$$\mathbf{i}f_i - \mathbf{i}R_{i+1}f$$

$$\mathbf{i}+1$$

$$\mathbf{i}+1 - \mathbf{i}F_i = 0 .$$

$$(9.3.24)$$

Per le forze e:

$$\mathbf{i}n_i - \mathbf{i}R_{i+1}n$$

$$\times \mathbf{i}F$$

$$\times \mathbf{i}R_{i+1}F$$

$$\mathbf{i}+1$$

$$\mathbf{i}+1 - \mathbf{i}rG_i$$

$$\mathbf{i} - \mathbf{i}rG_{i+1}$$

$$\mathbf{i}+1$$

$$\mathbf{i}+1 - \mathbf{i}N_i = 0 .$$

$$(9.3.25)$$

Per i momenti. Le due equazioni scritte possono essere riformulate in forma iterativa come segue:

$$\mathbf{i}f_i = \mathbf{i}R_{i+1}f$$

$$\mathbf{i}+1$$

$$\mathbf{i}+1 + \mathbf{i}F_i .$$

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_R \mathbf{i}_{n+1}$$

$$\times \mathbf{i}_F$$

$$\times \mathbf{i}_R \mathbf{i}_{n+1}$$

$$\mathbf{i}_{n+1}$$

$$\mathbf{i}_{n+1} + \mathbf{i}_R \mathbf{G}_i$$

$$\mathbf{i} + \mathbf{i}_R \mathbf{G}_{i+1}$$

$$\mathbf{i}_{n+1}$$

$$\mathbf{i}_{n+1} + \mathbf{i}_N \mathbf{i} = 0 .$$

(9.3.26)

Le equazioni vengono valutate segmento per segmento, cominciando dall'ultimo, nel quale sono note le forze agenti. Se ad esempio si tratta di un arto inferiore potremo misurare mediante una piattaforma baropodometrica le risultanti, forza e coppia, agenti sul piede. I valori delle coppie prodotte dai muscoli possono essere calcolati come componenti lungo l'asse dell'articolazione delle coppie trasmesse tra un giunto e quello contiguo:

;

i

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_n \mathbf{T}$$

i

k .

(9.3.27)

Cioè come prodotto scalare del vettore che rappresenta il momento della coppia trasmessa tra i due segmenti e del versore \mathbf{k} del giunto i .

Un'osservazione delle equazioni mostra che la procedura non può andare avanti se non si conoscono per ogni segmento le forze e coppie inerziali. Questo comporta la determinazione per ciascun segmento delle velocità e accelerazioni dei baricentri e delle velocità e accelerazioni

Image 958

Image 959

Image 960

278

9 Dinamica

Fig. 9.10. Dinamica inversa dell'arto inferiore

angolari. È necessario partire quindi dal primo segmento per calcolare iterativamente quelle quantità. Le equazioni recursive da impiegare sono le seguenti: $i+1\mathbf{F}$

$i+1$

$i+1 =$

$i\mathbf{R}_{i+1} \ i\mathbf{F}$

\mathbf{k}

$i+1$

$i + \cdot$

H_{i+1}

$i+1$

$i+1 \cdot \mathbf{F}$

$i+1$

$i+1$

$i+1 =$

$i\mathbf{R}_{i+1} \cdot \mathbf{F}$

$\mathbf{R}_{i+1} \cdot \mathbf{F}$

\mathbf{k}

\mathbf{k}

$i+1$

$i +$

i

$i+1$

$i \times$

H_{i+1}

$i+1 +$

H_{i+1}

$i+1 .$

(9.3.28)

L'accelerazione dell'origine dei sistemi di riferimento collegati a ciascun segmento è data da (teorema di Rivals):

$$i+1 \cdot \mathbf{v}_{i+1} = i\mathbf{R}[i\mathbf{F}$$

$i+1$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{i} \mathbf{F}_i \times (\mathbf{i} \mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_{i+1}) + \mathbf{i} \dot{\mathbf{v}}_i$$

\mathbf{v}_i .

(9.3.29)

Nell'equazione precedente il termine \mathbf{r}_{i+1} è il vettore posizione dell'origine del sistema di riferimento $[i+1]$ rispetto al sistema $[i]$. Dobbiamo ora calcolare, per ottenere le forze d'inerzia le accelerazioni dei baricentri di ogni singolo segmento. Per il teorema di Rivals abbiamo:

$$\mathbf{i} \dot{\mathbf{v}}_G = \mathbf{i} \dot{\mathbf{F}}$$

$+ \mathbf{i} \mathbf{F}$

$) + \mathbf{i} \dot{\mathbf{v}}$

\mathbf{i}

$$\mathbf{i} \times \mathbf{r}_{Gi}$$

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_{Gi})$$

\mathbf{i} .

(9.3.30)

Si tenga presente che essendo il segmento 0 identificabile con la parte fissa del sistema sarà naturalmente $\mathbf{F}_0 = \mathbf{0}$

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{0}.$$

L'algoritmo iterativo completo di Newton-Eulero è composto di due parti. Inizialmente vengono calcolate le velocità e accelerazioni per ciascun segmento con le (9.3.36), (9.3.29), (9.3.30) partendo dal segmento 0 sino all'ultimo. In seguito vengono calcolate le forze e coppie d'inerzia con le (9.3.23). Quindi vengono applicate le equazioni d'equilibrio per ciascun

segmento per calcolare le coppie nei giunti, generate dalle forze muscolari con le (9.3.26).

Effetto della gravità. Si può tener conto delle forze di gravità dei vari segmenti imponendo che $0 \cdot \mathbf{v}_0 = -\mathbf{g}$, dove nella relazione precedente \mathbf{g} è il vettore accelerazione di gravità, ma col verso cambiato. In altre parole si applica a tutto il sistema in esame un campo di accelerazione diretto verso l'alto, (se la gravità agisce verso il basso), di modulo g .

9.3 Dinamica del corpo rigido

279

f4

f3

n4

n3

F

N

2

3

[1]

f

N

2

2

(3)

N1

F

n

3

2

[2]

(2)

f

(1)

1

[3]

f3

F1

n2

f2

n3

Fig. 9.11. Dinamica inversa per le tre sezioni dell'arto inferiore **Esempio 9.6.** Con riferimento alla Fig. 9.2 si osservi un corridore la cui gamba destra poggiata sul terreno è soggetta a un sistema di pressioni, misurabile mediante una piattaforma baropodometrica. Da queste si risale alla forza risultante applicata in un punto del piede dell'atleta. Questa forza ha una

componente verticale prevalente, ma non è necessariamente verticale. Ricordiamo che il moto orizzontale dell'atleta è dovuto alle forze d'attrito che nascono tra i piedi e il terreno. Supponiamo ora che, grazie a un sistema di analisi del movimento siano state determinate le velocità e accelerazioni in corrispondenza dell'anca, del ginocchio e della caviglia. Questo si può ottenere anche grazie alle (9.3.36), (9.3.29), (9.3.30) se si conoscono gli angoli in corrispondenza delle articolazioni e le loro derivate, \dot{H}_i , \ddot{H}_i . Si calcolino ora le azioni d'inerzia, forze e coppie in ognuno dei tre segmenti. Il piede è soggetto a una forza nota, \mathbf{f}_1 , risultante delle azioni di pressione tra il piede e il terreno. Come abbiamo detto le pressioni di contatto possono misurarsi mediante una piattaforma baropodometrica. Sul baricentro agisce una forza d'inerzia nota, \mathbf{F}_1 , il cui modulo è dato dal prodotto dell'accelerazione del baricentro per la massa del piede. L'accelerazione del baricentro si suppone ricavata attraverso il sistema di analisi del movimento con successive elaborazioni matematiche, la massa del piede si suppone nota o misurabile con valutazioni antropometriche. In corrispondenza dell'articolazione della caviglia sono presenti la forza \mathbf{f}_2 , incognita e il momento \mathbf{n}_2 . Ricordiamo che tutti i vettori che rappresentano le forze ed i momenti devono essere espressi, nell'algoritmo di Newton-Eulero, nel sistema di riferimento solidale al piede [1]. L'applicazione delle (9.3.22) condurrà alla determinazione della forza incognita \mathbf{f}_2 e del momento incognito \mathbf{n}_2 . Il prodotto scalare tra il momento \mathbf{n}_2 e il versore \mathbf{k}_1 del sistema di riferimento [1], solidale al piede fornisce il momento ; 1 prodotto dalle azioni muscolari dei muscoli che operano nella flessione-estensione della caviglia. Il presente modello non prende in considerazione l'articolazione sub-talare. Analizzando il secondo segmento, la gamba, ci troviamo nelle stesse condizioni del caso precedente in quanto le forze e le coppie agenti sulla caviglia, \mathbf{f}_2 , \mathbf{n}_2 sono ora note. Potremo quindi procedere determinando le azioni incognite, \mathbf{f}_3 , \mathbf{n}_3 e la coppia ; 3 dovuta alle azioni muscolari.

La procedura iterativa prosegue poi con la coscia in modo analogo a quanto visto in precedenza.

Determinazione delle azioni muscolari. La ricerca delle azioni muscolari a cui corrispondono le azioni risultanti \mathbf{f}_3 ; $\mathbf{3}$ è complicata perché in genere non si tratta di un problema isostatico. Si veda quanto detto a proposito nel Cap. 8 relativo alla statica.

Soluzione in forma chiusa o numerica per l'algoritmo

di Newton-Eulero

Tornando alle equazioni scritte in forma iterativa nell'algoritmo di Newton-Eulero osserviamo che esistono due possibili procedure per arrivare alla soluzione:

-

Operare iterativamente in forma numerica seguendo la sequenza descritta, risolvendo prima il problema cinematico per tutti i segmenti e quindi scrivendo le equazioni di equilibrio dinamico per ciascun segmento sino all'ultimo. Questo porta al calcolo delle azioni risultanti nelle articolazioni in forma numerica. La procedura è particolarmente attraente perché le equazioni si applicano ad ogni possibile geometria del sistema. Una volta dati per ogni segmento i tensori d'inerzia, le posizioni dei baricentri e le matrici di trasformazione $1+i\mathbf{R}$, le equa-

zioni possono essere applicate direttamente per ottenere le azioni risultanti nelle articolazioni, corrispondenti a qualunque movimento.

-

Esistono dei casi in cui la procedura precedente non viene considerata soddisfacente perché lascia nell'ombra la struttura delle equazioni dinamiche, senza dire niente sull'importanza e sulla natura dei termini che le compongono. Ad esempio: "Qual'è l'importanza dei termini gravitazionali nel calcolo delle forze e dei momenti muscolari?" La risposta a questa ed a altre domande è una procedura che segue gli stessi passi visti in precedenza, ma tratta le equazioni in modo simbolico, invece che numerico. In questo modo le espressioni che si ottengono per le quantità incognite, sono investigabili nella struttura e nella forma. Per applicare la

0

Avendo assunto la distribuzione di massa costituita da masse puntiformi, i tensori d'inerzia sono rappresentati da matrici nulle:

$$G1 \mathbf{I} = 0$$

$$G2 \mathbf{I}$$

1

$$2 = 0 .$$

(9.3.32)

 Image 961

9.3 Dinamica del corpo rigido

281

Fig. 9.12. Braccio articolato

Poiché non vi sono forze all'estremità del braccio scriviamo che: $\mathbf{f}_3 = 0$

$$\mathbf{n}_3 = 0 .$$

(9.3.33)

La parte fissa del braccio, rappresentata in figura come un rettangolo tratteggiato, non ruota quindi si ha:

$$0 \mathbf{F}_0 = 0 .$$

$$0 \mathbf{F}_0 = 0 .$$

(9.3.34)

Assumendo che il braccio sia sotto l'azione della gravità scriveremo:

$[]$ $\{ 0 \}$

$$0 \cdot v_0 = g_j =$$

 $.$ 0 $[g]$

(9.3.35)

 0

Le matrici di rotazione che legano un segmento al successivo e viceversa sono:

 $[$ $]$ $[$ $]$ c_1 $-s_1 \ 0$ c_1 $-s_1 \ 0$ 0 $[$

]

1

[

]

1R =

s1

c1

0

0R =

s1

c1

0

0

0

1

0

0

1

[

]

[

]

c^2

$-s^2 0$

c^2

$-s^2 0$

1

[

]

2

[

].

$2\mathbf{R} =$

s^2

c^2

0

$1\mathbf{R} =$

s^2

c^2

0

(9.3.36)

0

0

1

0

0

1

Applichiamo ora la procedura iterativa delle equazioni (9.3.20), (9.3.21), (9.3.22).

282

9 Dinamica

Per il primo segmento abbiamo:

[]

[]

{ 0 }

{ 0 }

1F

1

1

1

1 = ·

H1 k1 = [0

F1 = "H1 k1 =

0

.

H]

["]

1

H1

[

] [] [

]

c1

s1

0

{ 0 } { gs1 }

1 · v

[

]

1 = 1

-

=

0R 0 ·

v0 =

s1

c1

0

[g] [gc1]

0

0

1

0

0

[

] [

] [

] [

]

{ 0 } { - 11H2 } { gs } { - 1

{

1

1

1H2

1

1 v

..

..

G =

1 H

0

gc

1 H

1

[1] + [

] + [1] = [1 1 + gc1]

0

0

0

0

[

}

{ }

{ - m111H2 + m

}

{ 0 }

1

1gs1

1F

..

1

1 = { m1i1H + m1gc1

=

J

N

0

1

{ } .

(9.3.37)

0

0

Per il secondo segmento si ha:

[

]

[

]

}

0

}

}

0

}

2F

2

$2 = \lfloor 0$

.

F2 =

0

.

H

J

l ·

J

1 + ·

H2

H1 + 'H2

l

l l

l l

l

c

·

..

·

2

s2

0

{ - 11H2 + gs } { 1 H

H2c

{

1

1

1

$1s^2 - 11$

$1^2 + gs_{12}$

$2 \cdot v$

[

]

..

..

.

$2 =$

$- s^2 c^2 0$

$=$

$[11H_1 + gc_1] [11H_1c_2 + 11H_2s$

$1^2 + gc_{12}]$

0

0

1

0

0

┌

└┌

└┌

└

└

0

└└ - 1

..

.

2(H2 + H2) └

└ 1 H

H2c

└

1

1

1

1s2 - 11

1 2 + gs12

2 ·v

..

.

G =

1

0

1 H

H2s

2

$$\left[2(\ddot{H}1 + \ddot{H}1) \right] \left[\right]$$

$$\left] + \left[1 \ 1c2 + 11 \ 1 \ 2 + gc12 \right]$$

0

0

0

[

]

|

{ m

..

.

$$211H1s2 - m211H2c$$

$$+ \ddot{H}2) \left| \right.$$

$$1 \ 2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1^2)$$

$$H_{21}$$

$$1$$

$$\left\{ \right.$$

$$2F$$

..

.

$$2 = \left[m \ H \right.$$

$$H_2 c s_2 + m$$

$$\left[\begin{matrix} 211 & 1c_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \end{matrix} \right]$$

$$2g c_{12} - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1^2)$$

$$H_1 + (H_2) \left[\right]$$

$$0$$

$$\left[\right]$$

$$\left\{ 0 \right\}$$

$$2N_2 = \left[0 \right] .$$

(9.3.38)

$$0$$

L'iterazione all'indietro per la determinazione delle forze e delle coppie da per il segmento 2:

$$2f_2 = 2F_2$$

{

}

{

0

}

$$2n_2 = \lfloor$$

0

].

(9.3.39)

m

..

.

$$21112c_2H_1 + m_{212}s_2H_2 + m$$

(\ddot{H}

1

$$212gc_{12} + m_{212}$$

2

1 + ..

H1)

 Image 962

 Image 963

9.3 Dinamica del corpo rigido

283

Per il segmento 1 si ha poi:

[

] [

]

c

..

.

2

- s² 0 |

{ m₂₁₂s²H₁ - m₂₁₁c₁H₂ + m

|

1

2gs₁₂ - m₂₁₂(

H₁ + 'H₂)² }

1

|

|

f

..

.

$$1 = [s^2$$

c^2

0]

+

| m

H

H^2 + m

$$[212c^2 1 - m211s^1 1$$

$$2gc^{12} - m212("$$

$$H^1 + "H^2)^2 |]$$

0

0

1

0

[

]

{ - m

.

111H2 + m

{

1

1gs1

+

..

{ - m111H2 + m

1

1gc1]

0

[

]

{

0

{

1n1 = [

0

] +

m

..

.

21112c2H1 - m21112s2H2 + m

("H

1

212gc12 - m212

2

1 + "

H2)

{

}

{

0

}

+ l

0

J+

m

..

112H

1

1 + m111gc1

{

}

|

|

}

0

|

|

}

+

0

.

|

(9.3.40)

|

..

H

$\{m_{112}$

|

1

$1 - m_{211}^2 s^2$

$(\dot{H}_1 + \dot{H}_2)^2 + m_{212}^2 g^2 s^2 +$

+

]

$m_{211}^2 c^2 (\ddot{H}_1 + \ddot{H}_2) + m_{211} g d^2 c^2$

Le componenti di secondo i versori sono:

1;

..

.

$1 = m_{212}(\ddot{H}_1 + \ddot{H}_2)$

H

H

$H_2 -$

2

$1 + \ddot{H}_1 + \ddot{H}_2$

$(H_2) + m_{211}^2 c^2 (2 \ddot{H}_1 + \ddot{H}_2) + (m_1 + m_2) \ddot{H}_1 - m_{211}^2 s^2 \ddot{H}_2$

$- 2m$

..

$$21112s2H1H2 + m222gc12 + (m1 + m2)l1gc2$$

2;

..

.

$$2 = m21112c2H1 + m21112s2H2 +$$

(\ddot{H}

1

$$m212gc12 + m2122(1 + \ddot{H}2) .$$

(9.3.41)

Le espressioni precedenti sono alquanto lunghe e complicate, pur essendo il caso scelto tra i più semplici. È facile immaginare che trattando problemi con un numero di gradi di libertà più elevato le espressioni diventino intrattabili e difficili da semplificare pur ricorrendo alla potenza degli ambienti di calcolo simbolico disponibili.

Cenni sulla formulazione Lagrangiana

Le equazioni di Newton-Eulero si basano sulla formulazione delle equazioni di equilibrio per ciascun segmento del sistema. La formulazione Lagrangiana delle equazioni della dinamica è invece basata su un approccio energetico. Ci limiteremo ad esporne i punti principali, rimandando a testi specialistici per ulteriori approfondimenti. Stabilito un sistema di coordinate indipendenti che definiscano univocamente la configurazione del sistema, si calcolino l'energia cinetica, come somma delle energie cinetiche di traslazione e rotazione di ciascun segmento e l'energia potenziale. Trattando sistemi articolati seriali come i nostri arti superiori e inferiori, l'unico tipo di energia potenziale presente è quella di posizione, se

ci si trova in un campo gravitazionale. Per un generico sistema composto da n segmenti, l'energia cinetica è fornita dall'espressione:

1

$$T = \sum T$$

m

$$+ \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{G}_i \mathbf{v}_i$$

(9.3.42)

i

$$i = \sum i$$

\mathbf{v}_i^T

i

i

2

$\mathbf{G}_i \mathbf{v}_i$

2

i

 Image 964

 Image 965

 Image 966

 Image 967

 Image 968

 Image 969

 Image 970

 Image 971

284

9 Dinamica

Il primo termine all'interno della sommatoria rappresenta l'energia cinetica dovuta alla traslazione del segmento, il secondo termine l'energia cinetica di rotazione dovuta alla velocità angolare del segmento stesso. I termini v_i

G

F

i

i sono funzioni delle

coordinate Lagrangiane e delle loro derivate, H, \dot{H} per cui l'energia cinetica risulta alla fine espressa nella forma seguente:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{H}}^T \mathbf{M}(\mathbf{H}, \dot{\mathbf{H}}) \dot{\mathbf{H}}.$$

(9.3.43)

2

L'espressione scalare scritta rappresenta una *forma quadratica definita positiva*. L'energia cinetica infatti non può assumere valori negativi qualunque valore assumano le coordinate Lagrangiane. La matrice \mathbf{M} è la matrice di massa del sistema. La sua determinazione deriva dall'espressione (9.3.39) quando le velocità angolari e lineari vengono espresse in funzione degli angoli dei giunti. L'energia potenziale di posizione è espressa dalla relazione:

$$U = \sum_i (- m_i \mathbf{0g}^T \mathbf{0r}_i^G) + U_0$$

i

$$\mathbf{0g}^T \mathbf{0r}_i^G) + U_0$$

i

0 .

(9.3.44)

i

In cui $\mathbf{0g}$ è il vettore 3×1 che rappresenta l'accelerazione di gravità, $\mathbf{0r}_i^G$ è il vettore

posizione del baricentro del i -esimo segmento rispetto al sistema di riferimento fisso.

U_0 è invece un valore di riferimento per l'energia potenziale, scelto in generale in modo che il valore minimo di questa sia zero. La posizione dei baricentri è anch'essa funzione delle coordinate dei giunti, per cui l'energia potenziale potrà essere espressa, in analogia con quanto visto per l'energia cinetica, come funzione delle coordinate Lagrangiane $U(H)$. Il Lagrangiano è la differenza tra l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema:

$$\# = T(H, \dot{H}) - U(H) .$$

(9.3.45)

Le equazioni di Lagrange sono date dalle espressioni:

$$d \#$$

$$3 \#$$

–

$= \dot{q}_i$.

(9.3.46)

$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$

$\frac{\partial T}{\partial q_i}$

$= \dot{q}_i$

$= \dot{q}_i$

In cui \dot{q}_i sono le coppie di attuazione, nel nostro caso le coppie generate dai muscoli.

Ricordando l'espressione del Lagrangiano si ha anche:

$\frac{d}{dt}$

$\frac{\partial T(H, \dot{H})}{\partial \dot{H}}$

$\frac{\partial T}{\partial H}$

$= \frac{\partial T(H, \dot{H})}{\partial H} + \frac{dU(H)}{dH} = \dot{q}_i$.

(9.3.47)

$\frac{d}{dt}$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{H}}$

$\frac{\partial T}{\partial H}$

$\frac{\partial T}{\partial H}$

$= \dot{q}_i$

$= \dot{q}_i$

$= \dot{q}_i$

Applicazioni. Dinamica diretta di semplici sistemi articolati

Questi problemi hanno come obiettivo quello di determinare il campo di velocità ed accelerazione in un sistema, dovuto all'applicazione di un insieme di forze. Dualmente, nella dinamica inversa, si vuole ottenere le forze applicate, partendo dalle accelerazioni e velocità dei punti del sistema. Per mostrare la metodologia da applicare nella soluzione di problemi di dinamica diretta faremo riferimento al semplice

Image 972

9.3 Dinamica del corpo rigido

285

Y_0

Y_1

C_1

X_0

1

X_1

α_1

1

a_1

P_1

C_2

2

X2

a

Y

2

α^2

2

P

F

2

3

3

Fig. 9.13. Un sistema articolato a 2 g.d.l.

sistema con due elementi articolati, visto in precedenza. Si assumerà che il sistema sia inizialmente fermo e soggetto ad una forza orizzontale nel punto 3 e a due coppie, C1, C2 nei giunti 1 2. Per quanto riguarda le coppie applicate, esse devono essere interpretate come azioni interne, in particolare la coppia C1 che supponiamo agisca sull'elemento 1, col verso rappresentato in figura, sarà accompagnata da una coppia, eguale in modulo e di verso contrario, che agisce sull'elemento 0, in questo caso il telaio, la parte fissa del sistema. Analogamente la coppia C2, pensata col verso in figura, agente sull'elemento 2, sarà accompagnata da una coppia eguale e contraria agente sull'elemento 1. Questo perché ogni azione è accompagnata da una reazione eguale e contraria, come insegna il terzo principio della dinamica. I dati che assumeremo nel calcolo saranno i seguenti:

$$a_1 = a_2 = 0,5 \text{ m}$$

$$\theta_1 = 45^\circ$$

$$\theta_2 = 90^\circ$$

$$m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$$

$$C_1 = C_2 = 10 \text{ Nm}$$

$$r_1 = 0,2 \text{ m} \quad r_2 = 0,2 \text{ m} \quad F_3 = 10 \text{ N}$$

Le variabili θ_1 , θ_2 indicano i raggi d'inerzia dei due elementi. Supponendo che il sistema rappresentato giaccia in un piano verticale, abbiamo tenuto conto anche della presenza della gravità, inserendo i pesi P_1 , P_2 dei due elementi, applicati nei rispettivi **Fig. 9.14**. I diagrammi di corpo libero del primo segmento a) e del secondo b)

 Image 973

 Image 974

 Image 975

 Image 976

 Image 977

 Image 978

 Image 979

 Image 980

 Image 981

 Image 982

286

9 Dinamica

baricentri che, supponendo gli elementi costituiti da aste omogenee a sezione costante, saranno situati a metà lunghezza. La soluzione del problema dinamico si ottiene scrivendo i diagrammi di corpo libero degli elementi che lo compongono e ricavando le equazioni d'equilibrio. Trattandosi di un sistema piano si otterranno tre equazioni per ogni elemento, sei in totale, mentre le incognite da ricavare sono 10, vale a dire: $H_1, H_2, V_1, V_2, \ddot{x}_{G1}, \ddot{x}_{G2}, \ddot{y}_{G1}, \ddot{y}_{G2}, \theta_1, \theta_2$.

Separando il primo e il secondo elemento e scrivendo le equazioni d'equilibrio dinamico si ottiene:

$$H_1 - H_2 - m_1 \ddot{x}_{G1} = 0$$

$$V_1 - V_2 - m_1 \ddot{y}_{G1} - P_1 = 0$$

$$a_1$$

$$a_1$$

$$C_1 - I_{G1} \ddot{\theta}_1 - m_1 \ddot{x}_{G1}$$

$$\sin(\theta_1) - P_1$$

$$\cos(\theta_1) -$$

$$2$$

$$2$$

$$-$$

$$a_1$$

$$m_1 \ddot{y}_{G1}$$

$$\cos(\theta_1) - V_2 a_1 \cos(\theta_1) - H_2 a_1 \sin(\theta_1) = 0$$

$$2$$

$$H_2 - m_2 \ddot{x}_{G2} - F_3 = 0$$

$$V_2 + m_2 \ddot{y}_{G2} - P_2 = 0$$

$$a_2$$

$$a_2$$

$$C_2 - I_{G2} \ddot{\theta}_2 - m_2 \ddot{x}_{G2}$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) - P_2$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) +$$

$$2$$

$$2$$

$$+$$

$$a_2$$

$$m_2 \ddot{y}_{G2}$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) - F_3 a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0 .$$

$$(9.3.48)$$

$$2$$

Le relazioni supplementari che possono essere aggiunte al sistema, sono di tipo cinematico, ed esprimono relazioni tra accelerazioni, ottenute applicando il teorema di Rivals:

$$a$$

$$..$$

$$1$$

$$x_{G1} = \ddot{\theta}_1$$

$$\sin(\theta_1)$$

$$2$$

$$a$$

$$\ddot{\theta}_1$$

$$1$$

$$y_{G1} = \ddot{\theta}_1$$

$$\cos(\theta_1)$$

$$2$$

$$\ddot{x}_{G2} = \ddot{\theta}_1 a_1 \sin(\theta_1) + (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$2$$

$$\ddot{y}_{G2} = \ddot{\theta}_1 a_1 \cos(\theta_1) - (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) .$$

$$(9.3.49)$$

$$2$$

Abbiamo quindi un sistema di 10 equazioni lineari nelle 10 incognite $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, H_1, V_1,$

$H_2, V_2, \ddot{x}_{G1}, \ddot{y}_{G1}, \ddot{x}_{G2}, \ddot{y}_{G2}$. La soluzione è affidata al solutore di sistemi dell'ambiente

9.4 Fenomeni d'urto

287

Matlab. La matrice dei coefficienti è la seguente:

[

]

0

1

0

0

0

- 1

0

0

0

0

|

|0

0

0

1

0

0

0

1

0

0 |

|

|

| 0

0

0

0

0 - 0,18

0 - 0,18

0 - 0,063 |

|

|

| 1

- 1

0

0

- 1

0

0

0

0

0 |

|

|

0

0

1

- 1

0

0

- 1

0

0

0 |

A = |

|

|.

| 0 - 0,35

0 - 0,35 - 0,18

0 - 0,18

0

0 - 0,063 |

|

|

|0

0

0

0

1

0

0

0 - 0,18

0 |

|

|

|0

0

0

0

0

0

1

0

0

- 0,18 |

[

|

0

0

0

0

0

1

0

0 - 0,53

- 0,18]

0

0

0

0

0

0

0

1 - 0,53

- 0,18

Il vettore dei termini noti:

[

]

10,00

|

| 9,81 |

|

|

| - 8,20 |

|

|

| 0 |

|

$$\begin{array}{|c}
 | \\
 9,81 | \\
 \mathbf{B} = | \\
 | \\
 |. \\
 | - 8,27 | \\
 | \\
 | \\
 | 0 | \\
 | \\
 | \\
 | 0 | \\
 | \\
 | \\
 0 \\
 | \\
 0
 \end{array}$$

La soluzione, con le variabili nell'ordine H1, H2, V1, V2, xG1, xG2, yG1, yG2, 01, 02

è la seguente:

$$H_1 = 41,38 \text{ N} \quad H_2 = 33,47 \text{ N} \quad V_1 = -4,13 \text{ N} \quad V_2 = -13,66 \text{ N}$$

$$\ddot{x}_{G1} = 7,90 \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{x}_{G2} = 23,47 \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{y}_{G1} = -0,2739 \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{y}_{G2} = 23,47 \text{ m/s}^2$$

..

$$\dot{\theta}_1 = 44,72 \text{ rad/s} \quad \dot{\theta}_2 = -1,5 \text{ rad/s}$$

9.4 Fenomeni d'urto

L'urto è il contatto di breve durata tra corpi dotati d'energia cinetica con traiettorie che s'intersecano. Nel punto di contatto nascono delle forze, d'intensità in genere più elevata delle forze agenti sui due corpi, (peso, forze esterne) e di durata molto piccola.

Si definisce linea d'urto la normale alle superfici dei due corpi nel punto di contatto. L'urto si dice centrato se la linea d'urto passa per i baricentri d'entrambi i corpi che si urtano, eccentrico se questo non avviene. L'urto centrato si dice diretto quando le velocità dei baricentri dei due corpi sono allineate con la linea d'urto Fig. 9.15a, obliquo in caso contrario, Fig. 9.15b.



 Image 984

 Image 985

 Image 986

 Image 987

 Image 988

288

9 Dinamica

G1

G2

V

V

1

2

V

V

1

2

a) b) **Fig. 9.15.** Urto centrato: a) diretto; b) obliquo

Urto tra corpi liberi

In Fig. 9.16 sono state indicate le forze esterne agenti sui due corpi A , B e le forze che si generano durante l'urto, con spessore maggiore della linea. Utilizzando le espressioni viste in precedenza scriviamo la relazione che esprime la variazione della quantità di moto del sistema dei due corpi

nell'intervallo di tempo che intercorre tra l'istante immediatamente precedente la collisione e l'istante successivo: t

"

t

"

$$\sum \mathbf{F}_i, A dt + \sum \mathbf{F}_i, B dt = (\mathbf{Q}^+ +) - (+) =$$

A

\mathbf{Q}^+

B

\mathbf{Q}^-

A

\mathbf{Q}^-

B

i

i

0

0

$$= (m_A \mathbf{V}^+ +$$

) - (

+

).

A

$m\mathbf{B}\mathbf{V}+$

B

$m\mathbf{A}\mathbf{V} -$

A

$m\mathbf{B}\mathbf{V} -$

B

(9.4.1)

Si osservi che nella relazione precedente non compaiono gli impulsi delle forze dovute alla collisione, poiché queste forze, essendo forze mutue, si elidono a vicenda.

Inoltre al primo membro dell'equazione scritta compare l'impulso di una serie di forze molto piccole rispetto alle forze di collisione. Ne deriva che le quantità a primo membro sono trascurabili e questo può essere considerato nullo. Segue quindi che la quantità di moto complessiva del sistema dei due corpi è costante ovvero: $(\mathbf{Q}^+ +$

$) = ($

$+$

$).$

A

\mathbf{Q}^+

B

$\mathbf{Q} -$

A

Q -

B

(9.4.2)

Pertanto in un urto libero la quantità di moto del sistema resta costante.
Un'espressione analoga si ottiene per il principio di variazione del
momento della quantità di F1,B

F1,A

VB

FA,B

F2,B

G

G

A

B

A

F

V

B,A

A

B

F3,A

F2,A

F3,B

Fig. 9.16. Urto tra corpi liberi

 Image 989

 Image 990

 Image 991

 Image 992

 Image 993

9.4 Fenomeni d'urto

289

moto. Si ha, infatti, considerando i momenti rispetto ad un qualunque polo O: t

"

t

"

$\mathbf{OC} \times \mathbf{FA}, Bdt +$

$\mathbf{OC} \times \mathbf{FB}, Adt =$

0

0

t

"

t

"

=

$dH_{A, O} +$

$dH_{B, O}$

$VO \times QA dt +$

$+ VO \times QB dt = 0$

dt

dt

0

0

trascurando i termini $VO \times QA$ e $VO \times QB$ perchè piccoli rispetto agli altri, si ottiene:

$JA, O(F^+ - F^-) +$

$- F^-) =$

A

A

$JB, O(F^+$

B

B

0

da cui si trae:

J_A, OF^{++}

=

+

.

A

J_B, OF^{++}

B

J_A, OF^{-}

A

J_B, OF^{-}

B

(9.4.3)

Pertanto in un urto tra corpi liberi si conserva il momento risultante della quantità di moto. Nell'espressione precedente è stato trascurato l'integrale del prodotto vettoriale $\mathbf{VO} \times \mathbf{QA}$ e del prodotto $\mathbf{VO} \times \mathbf{QB}$ per la stessa ragione, detta in precedenza, sui momenti delle forze esterne. Si tratta di quantità piccole a fronte degli impulsi dei momenti delle forze dovute alla collisione.

Urto centrato diretto

Si considerino due corpi che entrano in collisione in un urto centrato diretto. Il principio di conservazione della quantità di moto porta a (9.4.2):

$$Q^+ + Q^+ = Q^- + Q^-$$

ovvero

m

+ m

= m

+ m

.

(9.4.4)

1

2

1

2

$1v^+$

1

$2v^+$

2

$1v^-$

1

$2v^-$

2

La relazione precedente è stata scritta in modo scalare perché l'urto si svolge su un'unica dimensione. Gli indici $-$ e $+$ indicano rispettivamente lo stato immediatamente precedente e immediatamente seguente l'urto. L'equazione scritta non è da sola sufficiente a determinare le grandezze dopo l'urto, quando siano date quelle prima dell'urto. Per giungere a questo risultato è necessario introdurre un'altra equazione che tiene conto dell'energia dissipata. Per questo si introduce il coefficiente di restituzione:

$$e = \frac{v_{2+} - v_{1+}}{v_{1-} - v_{2-}}$$

$$e = \frac{v_{2+} - v_{1+}}{v_{1-} - v_{2-}}$$

$$1$$

$$2$$

$$(9.4.5)$$

$$v_{2+} - v_{1+} = e(v_{1-} - v_{2-})$$

$$1$$

$$2$$

Il coefficiente di restituzione è una quantità scalare. Esso varia tra i valori limite 0

(urto completamente anelastico) e 1 (urto completamente elastico).

Risolvendo il sistema delle due equazioni si ottiene:

$$(m_1 - em_2)v_{1+} + m_2(1 + e)v_{2+} = (m_1 - em_2)v_{1-} + m_2(1 + e)v_{2-}$$

$$v_{1+} =$$

$$1$$

$$2$$

$$1$$

$$m_1 + m_2$$

$$(m_2 - em_1)v_- + m_1(1 + e)v_-$$

$$v_+ =$$

$$2$$

$$1 .$$

$$(9.4.6)$$

$$2$$

$$m_1 + m_2$$

 Image 994

 Image 995

 Image 996

 Image 997

 Image 998

 Image 999

290

9 Dinamica

L'energia meccanica persa, E_d , durante l'urto è data dalla differenza delle energie cinetiche possedute dal sistema prima e dopo l'urto:

$$E_d = \frac{1}{2} m_1(v_-)^2 + \frac{1}{2} m_2(v_-)^2 - \frac{1}{2} m_1(v_+)^2 - \frac{1}{2} m_2(v_+)^2 .$$

$$(9.4.7)$$

$$2$$

1

2

2

2

1

2

2

Facendo uso del coefficiente di restituzione si ottiene facilmente: $E_d = m_1 m_2 (1 - e^2) (v_1 - v_2)^2$.

(9.4.8)

$2(m_1$

1

2

$1 + m_2)$

Urto centrato obliquo

Nel caso rappresentato in Fig. 9.17 non abbiamo più le velocità delle due sfere che impattano obliquamente, allineate con la linea d'urto (normale alla tangente comune alle due sfere nel momento della collisione). Le inclinazioni dei vettori velocità vengono misurate rispetto alla tangente comune nel punto di contatto, che identifichiamo come asse X. Quindi le componenti secondo i due assi delle velocità prima e dopo l'urto delle due sfere sono:

$$v_{1X} = v_1 \cos H_1$$

v

=

=

.

1X

$$v_{1X} \cos H_1 - v_{1Y} \sin H_1 = -v_1 \sin H_1$$

$$v_{1Y} \sin H_1$$

Le due forze uguali $F - F$ che nascono nel contatto tra le due sfere sono rappresentate a destra in Fig. 9.17. Nel piccolo intervallo di tempo durante il quale le due sfere si toccano il modulo delle forze F varia con legge impulsiva, del tipo di quella rappresentata in figura. Per determinate condizioni iniziali $m_1, m_2, v_{1X}, v_{1Y}, v_{2X}, v_{2Y}$ si avranno quattro incognite, precisamente $v_{1X}, v_{1Y}, v_{2X}, v_{2Y}$.

1X

1Y

2X

2Y

Per trovare queste incognite sono quindi necessarie quattro equazioni. Osservando il sistema possiamo facilmente dedurre che:

1) Il sistema delle due masse conserva la sua quantità di moto in direzione Y. Infatti in questa direzione agisce soltanto le due forze F e $-F$ durante l'urto, che, essendo uguali ed opposte non cambiano la quantità di moto del sistema. Si ha quindi: $m_1 v_{1Y} + m_2 v_{2Y} = m_1 v_{1Y} + m_2 v_{2Y}$

.

v_{1y}

$m_2 v_{2Y}$

(9.4.9)

Fig. 9.17. Urto centrato obliquo. Le sferette prima e dopo l'urto e un diagramma tipico della forza scambiata nella collisione

 Image 1000

 Image 1001

 Image 1002

 Image 1003

 Image 1004

9.4 Fenomeni d'urto

291

2) La quantità di moto di ciascuna delle due sfere in direzione X non cambia. Infatti non sussistono forze in questa direzione. Si ha:

$$m_1 v_{1X} = m_1 v'_{1X}$$

$$m_2 v_{2X} = m_2 v'_{2X}$$

2X

(9.4.10)

3) In direzione Y il coefficiente di restituzione è il rapporto, cambiato di segno, tra la differenza iniziale delle due componenti Y delle due sfere e la differenza finale, cioè:

- v

$$e = \frac{v_{2y} - v_{1y}}{v_{1y} - v_{2y}}$$

1y .

(9.4.11)

$$v_{1y} - v_{2y}$$

Le quattro equazioni scritte risolvono il problema proposto. Una volta ottenuti le componenti X e Y delle velocità delle sfere dopo l'urto sarà facile ricavare gli angoli θ_1 e θ_2 .

Alcuni coefficienti di restituzione tipici:

Materiale

e

Acciaio contro acciaio

0,65

Avorio contro avorio

0,89

Legno contro legno

0,50

Rame contro rame

0,40

Vetro contro vetro

0,93

Esempio 9.8. L'auto B, di massa 1500 kg, che viaggia verso Ovest a 48 km/h entra in collisione con l'auto A, di 1600 kg, che viaggia verso Nord a 32 km/h. Le due macchine si incastrano e si muovono come un unico corpo dopo l'urto. Si calcoli la grandezza v della loro velocità comune immediatamente dopo l'urto e l'angolo del vettore velocità dopo l'urto con la direzione Nord.

Fig. 9.18. Collisione tra due auto

 Image 1005

 Image 1006

 Image 1007

 Image 1008

 Image 1009

 Image 1010

 Image 1011

292

9 Dinamica

Ricordando che, per il sistema delle due auto, vale il principio della conservazione della quantità di moto si ha:

$$- 1500 * 15 * \mathbf{i} + 1600 * 8,88 * \mathbf{j} = 3100 \mathbf{v} \quad \mathbf{v} = - 1500 * 15 \mathbf{i} + 1600 * 8,88 \mathbf{j} = - 7,25 \mathbf{i} + 4,58 \mathbf{j} \quad 3100$$

3100

l'energia cinetica persa nell'urto vale:

$$!E = 11500 * 15^2 + 11600 * 8,88^2 - 3100 * (7,25^2 + 4,58^2) = 117.848 \text{ J}.$$

2

2

2

Esempio 9.9. Una pallottola di massa 60 g viene sparata con velocità pari 300 m/s su una barra sottile, con una massa all'estremità di 1,5 kg, articolata ad un punto fisso.

Se il proiettile resta incastrato nella barra, trovare la velocità angolare di quest'ultima dopo l'impatto. Si trascuri la massa dell'asta (Fig. 9.19).

Si applica il principio della conservazione del momento della quantità di moto.

Il valore di H prima dell'impatto è semplicemente il momento della quantità di moto della pallottola rispetto al fulcro, dopo l'urto quello del sistema asta-pallottola.

Si ha allora:

kgm²

H - =

= (

O

0,060 * 300 * 0,25 = 4,5

0,060 * 0,25² + 1,5 * 0,52) * F

s

F = 1,188 rad/s .

Si osservi che non si conserva la quantità di moto. Il motivo è che, in corrispondenza del vincolo, nasce una forza avente un ordine di grandezza simile a quello della forza impulsiva prodotta dal proiettile. L'impulso di questa forza non può più essere trascurato. Esso dà luogo quindi all'annullamento di una parte della quantità di moto lineare del sistema.

Fig. 9.19. Il pendolo basistico

Esempio 9.10 (Forze impulsive nel salto ripetuto). Si consideri la situazione della Fig. 9.20. Un atleta compie dei salti ripetuti senza spostarsi dalla posizione. L'altezza del salto dipende dalle forze muscolari sviluppate dal quadricipite (se si flettono

 Image 1012

 Image 1013

 Image 1014

 Image 1015

9.4 Fenomeni d'urto

293

Fig. 9.20. Il salto verticale

le ginocchia) e dal tricipite della sura (gemelli del gastrocnemio+soleo). Il meccanismo di preparazione del salto consiste in una contrazione eccentrica dei muscoli, effettuata mediante la flessione delle ginocchia e delle caviglie. In questa fase i muscoli accumulano energia elastica come delle molle, energia che restituiscono solo in parte durante la successiva fase di contrazione concentrica, nella quale l'attivazione muscolare viene portata al massimo, per ottenere la massima forza contrattile.

L'analisi dei parametri del salto, altezza raggiunta, tempo di contatto t_c e tempo di volo t_v è importante non solo per l'ottimizzazione della prestazione, ma anche per studiare l'effetto di eventuali patologie e traumi a livello muscolare o neuromotorio.

Sperimentalmente si può impiegare una piattaforma baropodometrica, per misurare le pressioni di contatto ad intervalli di tempo molto ravvicinati, anche 1/1000 s, e di marker rilevati mediante un sistema ottico, per misurare lo spostamento verticale del baricentro. La strumentazione può essere completata con sensori elettromiografici, per misurare le tensioni alla superficie della pelle vicino ai muscoli interessati.

Queste tensioni possono essere correlate, con qualche approssimazione, al potenziale di attivazione muscolare. La piattaforma baropodometrica permette di ottenere per integrazione delle pressioni la risultante delle azioni del suolo sui piedi del saltatore. Ricordiamo che questa risultante non è uguale alla forza peso dell'atleta, perché durante la fase di accelerazione, la reazione sul terreno è uguale alla forza d'inerzia sommata alla forza peso. In questa fase l'equazione del moto del baricentro del saltatore è:

$$m\ddot{y} = R_c(t) - W .$$

(9.4.12)

Si noti che non si tratta di un moto uniformemente accelerato perché la reazione R_c è funzione del tempo. Se vogliamo conoscere il valore della reazione durante il contatto non abbiamo altra strada che avanzare qualche ipotesi sulla funzione che la rappresenta.

•

Facciamo l'ipotesi che sia $R_c = \text{cost}$ per tutto il tempo di contatto. In questo caso il suo andamento è rettangolare, come nella Fig. 9.21. È facile vedere che l'integrazione della (9.4.12) porta alle espressioni:

(

"

R

(R

..

$c - W)$

$c - W)t$

$y =$

$\ddot{y}dt =$

$+ C1$

m

m

$(Rc - W)t^2$

$y =$

$+ C1t + C2 .$

(9.4.13)

$2m$

 Image 1016

 Image 1017

 Image 1018

 Image 1019

 Image 1020

 Image 1021

 Image 1022

9 Dinamica

Fig. 9.21. Il salto ripetuto; a) diagramma di corpo libero; b) leggi del moto
 Le costanti di integrazione possono essere determinate facilmente, osservando che la posizione del baricentro al momento dell'inizio del salto (cioè al contatto dei piedi con la base, dopo la fase di volo precedente) è sull'asse di riferimento, quindi $C_2 = 0$.

La velocità iniziale al momento dell'inizio del contatto è diretta verso il basso ed è il risultato della caduta precedente, per cui $C_1 = \dot{y}_0 = -g t_v$. Si ha quindi: 2

(

"

R

(R

..

$c - W)$

$c - W)t$

$y =$

$\ddot{y}dt =$

$- +C_1$

m

m

$(Rc - W)t^2$

$$y =$$

$$+ C_1 t + C_2 .$$

(9.4.14)

2m

L'andamento della velocità del baricentro è quindi lineare sino al momento del distacco da terra, dopo di che comincia a decrescere a causa della gravità. Il grafico di velocità è stato rappresentato tratteggiato a punti nella stessa Fig. 9.21. Alcune osservazioni sono opportune al riguardo:

-

la legge di velocità è lineare, come abbiamo detto, con due tratti che si incontrano al tempo in cui il corpo si stacca da terra;

-

il baricentro del corpo ha un moto discendente iniziale perché si presuppone che toccando terra dal salto precedente il baricentro abbia una prima fase di discesa a causa del meccanismo di recupero dell'energia di cui abbiamo parlato in precedenza. L'andamento dello spostamento verticale è di tipo parabolico.

La massima elevazione raggiunta dal baricentro può calcolarsi ricordando che il moto di caduta è un moto uniformemente accelerato per cui si ha:

t_v

$$y_{MAX} = \frac{1}{2} g t_v^2$$

$$\dot{y}_{MAX} = g \cdot t_v$$

(9.4.15)

2 v

2

Scritte tutte le relazioni necessarie possiamo risolvere il problema della determinazione dell'altezza del salto e della velocità al distacco, se abbiamo i tempi t_c e t_v .

 Image 1023

 Image 1024

 Image 1025

 Image 1026

 Image 1027

 Image 1028

 Image 1029

 Image 1030

 Image 1031

 Image 1032

 Image 1033

 Image 1034

 Image 1035

 Image 1036

 Image 1037

 Image 1038

 Image 1039


 Image 1040

 Image 1041

 Image 1042

 Image 1043

 Image 1044

 Image 1045

 Image 1046

 Image 1047

 Image 1048

9.4 Fenomeni d'urto

295

Infatti l'altezza del salto si ottiene dalla prima delle (9.4.15) e la velocità al distacco dalla seconda. Resta da determinare il valore di R_c . Dall'ultima relazione nelle (9.4.14) si ha:

t

$(R$

\cdot

v

$c - W)tc$

$yt=t = \dot{y}$

$+$

R

$$+W = W_1 + t_v \cdot (9.4.16)$$

c

$$MAX = -g$$

$$c = mg t v$$

2

m

t_c

t_c

Si supponga che per un saltatore si abbia $m = 70 \text{ kg}$, $t_c = 0,3$, $t_v = 0,25 \text{ s}$.
Si ottiene facilmente:

t_v

$$y_{MAX} = \frac{1}{2} g t_c^2 = 0,44 \text{ m}$$

$$\dot{y}_{max} = g t_c$$

$$= 1,22 \text{ m/s}$$

$$R_c = 2W = 1259 \text{ N}$$

2 v

2

Si immagini ora di usare una legge più realistica per l'andamento della reazione col tempo, ad esempio una mezza senoide rappresentata dalla legge: $R_c(t) = R_{cmax} \sin \frac{\pi}{2} t$

(9.4.17)

tc

L'equazione di equilibrio dinamico da cui partire è sempre la (9.4.12) la cui integrazione porta all'espressione:

$$\ddot{y} = R_c(t) - W = R_{cmax} \sin \omega t - g$$

- g

m

m

tc

$$\dot{y} = \frac{R_{cmax}}{m} t \cos \omega t - gt + C_1$$

- gt + C1 .

(9.4.18)

t

tc

La costante d'integrazione C1 rappresenta la velocità iniziale del baricentro del corpo.

Dal momento che la fase di contatto segue una precedente fase di volo, la velocità iniziale della fase di contatto coincide con la velocità finale della fase di volo che non è altro che una caduta libera del corpo con accelerazione g. Poiché la caduta libera inizia in corrispondenza della metà del tempo di volo, nell'istante in cui il corpo si ferma in aria, la velocità del baricentro all'atterraggio sarà $\dot{y}_0 = -g \frac{t_v}{2}$. Sostituendo 2

questo valore al posto di C1 e integrando ulteriormente per ottenere lo spostamento y, si ha:

tv

tv

$$C1 = -g$$

$$\dot{y} = \dot{y} = -gt$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C1t + C2$$

2

> cos

tc

2

tv

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C1t + C2$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C1t + C2$$

+

> sin

g

C2

con

$$C2 = 0.$$

(9.4.19)

t_c

2

2

C_2 è uguale a zero perché nel momento del contatto del corpo col suolo si suppone che esso sia in posizione estesa ed il baricentro avrà spostamento nullo rispetto al sistema di riferimento. L'elevazione massima del baricentro si può ricavare dal tempo di volo, se questo è noto:

\dot{y}^2

t_v

y

0

$MAX = y^2 =$

con

$\dot{y}_0 = g$

da cui:

$2g$

2

$(gt_v)^2$

y

2

2 =

= gt^2v .

(9.4.20)

2g

8

 Image 1049

 Image 1050

 Image 1051

 Image 1052

 Image 1053

 Image 1054

 Image 1055

 Image 1056

 Image 1057

 Image 1058

 Image 1059

 Image 1060

 Image 1061

 Image 1062

296

9 Dinamica

La formula precedente è giustificata dal fatto che per un moto balistico che inizia e finisce allo stesso livello le velocità iniziale e finale sono uguali e di segno opposto.

Ciò significa che la velocità iniziale del periodo di volo è uguale in modulo alla velocità al momento del contatto. Poiché la fase di caduta inizia al tempo t_v , iniziando a

contare i tempi al momento del distacco e finisce al momento del contatto con velocità $g t_v$, ne segue che la velocità al distacco è $g t_v$. L'andamento della velocità è

2

la somma di una funzione sinusoidale, vedi (9.4.19), di una funzione parabolica e di una funzione lineare. Se si hanno i valori dei tempi di volo e di contatto è possibile tracciare il grafico o conoscere il modulo della velocità istante per istante. Quello che però maggiormente interessa è la forza massima di contatto R_{cmax} . Ricordando ancora il teorema della quantità di moto (9.2.5):

t_c

"

t_c

(

t_v

$$R_{cmax} \sin(\omega t) - W) dt = 2m \dot{y}_0$$

- t_c

) - Wt

= $2mg$

tc

$>R_{cmax} \cos(> ttc$

2

0

0

tc

tv

>

>

2

(

.

$$>R_{cmax} - W_{tc} = 2mg$$

$$R_{cmax} =$$

$$W_{tc} + mg_{tv}) =$$

$$W_{1 + tv}$$

2

2tc

2

tc

(9.4.21)

Ricordando l'esempio precedente di un saltatore di massa pari a 70 kg con $t_c = 0,3$, $t_v = 0,25$ s si ha:

$$R_{cmax} = > * 70 * 9,81 * 1 + 0,25$$
$$= 1977 \text{ N}.$$

0,3

È interessante notare come, a parità di parametri del salto, la forza massima di contatto vari in modo radicale con i due modelli proposti.

9.5 Lavoro ed energia

Il lavoro di una forza si ottiene come prodotto scalare del vettore che rappresenta la forza per quello che rappresenta lo spostamento del punto di applicazione.

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P1P2} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z.$$

(9.5.1)

Nel caso in cui il punto di applicazione della forza si muova nella direzione della linea d'azione della forza stessa, il lavoro è rappresentato dal prodotto del modulo **Fig. 9.22**. Lavoro di una forza

 Image 1063

 Image 1064

 Image 1065

 Image 1066

 Image 1067

9.5 Lavoro ed energia

297

Fig. 9.23. Un corpo rigido nello spazio

della forza per quello dello spostamento. Il lavoro ha un segno positivo quando la componente dello spostamento nella direzione della forza ha lo stesso verso della forza, un valore negativo quando ha verso opposto. Questo significa che la forza, nel primo caso produce lavoro durante lo spostamento del suo punto di applicazione, nel secondo caso ne assorbe.

Considerando un corpo rigido nello spazio al quale siano applicate delle forze esterne in punti definiti, il calcolo del lavoro complessivo compiuto dalla forze è facilitato, se si ricorda che per due punti generici A e B, si ha:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

cioè

$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}$$

quindi anche:

$$d\mathbf{r}_B$$

$$d\mathbf{r}_B$$

$$d\mathbf{r}_B$$

$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} .$$

(9.5.2)

Il lavoro compiuto dalle forze agenti sul corpo ha l'espressione: $dL = \sum \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum \mathbf{F}_i \cdot (d\mathbf{r}_A + d\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AP}) = \sum \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_A + \sum (\mathbf{F}_i \times \mathbf{r}_{AP}) \cdot d\boldsymbol{\omega}$

(F

) · d $\boldsymbol{\omega}$.

i

$$i \circ drA + \sum i \times rAPi$$

i

i

i

i

(9.5.3)

È semplice riconoscere che il primo termine dell'ultima espressione rappresenta lo spostamento del polo A, il secondo rappresenta il prodotto scalare del momento risultante del sistema di forze agenti rispetto ad A (nel caso fossero presenti delle coppie, queste vanno incluse nell'espressione del lavoro), per la rotazione del corpo. Se al corpo fosse applicata soltanto una coppia, il lavoro compiuto risulterebbe: $dL = C \circ d7$.

(9.5.4)

Se un corpo è deformabile, è il caso ad esempio delle molle, due forze interne eguali ed opposte possono compiere lavoro se varia la distanza tra i loro punti di applicazione. In Fig. 9.24 a destra è rappresentato il caso generale di una molla, inizialmente precaricata con due forze eguali F1, a cui corrisponde un allungamento x1, che è poi caricata da due forze F2 maggiori delle precedenti, che provocano un allungamento x2. Il lavoro compiuto dalle forze F2 nell'allungamento della molla da x1 a x2 vale: x2

"

$$L =$$

$$kxdx = 1 k(x2 - x2) .$$

(9.5.5)

2

2

1

x1

 Image 1068

 Image 1069

 Image 1070

298

9 Dinamica

Fig. 9.24. Lavoro di deformazione elastica di una molla: a) deformazioni successive; b) lavoro di deformazione

Il lavoro compiuto può anche essere visualizzato nel diagramma forze-allungamenti riprodotto. Esso corrisponde all'area trapezoidale con tratteggio incrociato. Se invece consideriamo la prima estensione della molla, partendo da una situazione di allungamento nullo il lavoro è pari a $\frac{1}{2} * kx^2$ e corrisponde all'area triangolare a tratteggio 1

semplice.

Energia potenziale

Nei sistemi conservativi il lavoro compiuto da una forza per spostare il suo punto d'applicazione da una posizione ad un'altra è indipendente dal percorso seguito. In questo caso le forze possiedono un potenziale tale che:

$$- dU = F$$

$$dU = - Fdr = - dL$$

(9.5.6)

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

$$T = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$$

$$!U = !$$

$$\int y$$

$$0$$

$$! \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} .$$

(9.5.7)

$$z$$

$$mg$$

La relazione precedente dice che la variazione differenziale del potenziale di una forza è eguale ma di segno contrario del lavoro compiuto dalla forza stessa durante uno spostamento infinitesimo. Un esempio di campo di forze a potenziale è quello delle forze di gravità. Sappiamo che lo spostamento di un corpo da una posizione ad un'altra può avvenire secondo infiniti percorsi, ma il lavoro compiuto dalla forza peso del corpo è funzione soltanto della posizione iniziale e di quella finale. Se ci riferiamo ad un sistema d'assi tridimensionale l'incremento dell'energia potenziale di gravità, ha l'espressione:

$$- dU = F$$

$$dU = - Fdr = - dL$$

(9.5.8)

dr

da questa relazione deriva che $\Delta U = mg\Delta z$ per cui lo spostamento di un corpo nello spazio provoca variazioni nella sua energia potenziale soltanto se varia la sua quota rispetto ad un piano di riferimento, parallelo al suolo.

 Image 1071

 Image 1072

 Image 1073

 Image 1074

 Image 1075

 Image 1076

 Image 1077

9.5 Lavoro ed energia

299

Fig. 9.25. Spostamento di una massa

La Fig. 9.25 mostra ad esempio che, se un blocco è sollevato in modo che il suo baricentro segua un percorso rappresentato da una spezzata, la variazione della sua energia potenziale sarà $mg\Delta z$ e il lavoro compiuto dalla forza peso sarà $-mg\Delta z$ in quanto il punto di applicazione si sposta con verso contrario alla forza. Questo significa che l'incremento di energia potenziale di posizione viene compiuto a spese di un lavoro fornito dall'esterno.

Energia potenziale elastica

Oltre all'energia potenziale di posizione dovuta al campo delle forze di gravità, è di particolare importanza quella che può essere immagazzinata all'interno di un corpo quando questo si deforma elasticamente. Tipico è il

caso delle molle, ma qualunque corpo capace di deformazione elastica restituisce, in tutto o in parte, il lavoro speso per produrre quella deformazione. Ogni elemento materiale del corpo accumula una quota elementare d'energia di deformazione, in base al tipo di sollecitazione. Con riferimento ai tipi di sollecitazione elementare di trazione, torsione e flessione descritti, si potranno scrivere le seguenti espressioni per le energie di deformazione.

Trazione

Si tratta del caso più semplice perché una trave in trazione è sostanzialmente una molla. Ricordando che l'energia di deformazione di una molla è data da $\frac{1}{2} kx^2$ nel caso

di una barra in trazione si ha (vedi i casi di sollecitazione elementare descritti in precedenza):

$F \Delta l$

$$U = - \int_0^{\Delta l} F dx = - F \Delta l = - \frac{F^2 l}{EA}$$

.

(9.5.9)

2

2

EA

2 EA

Per chiarire il significato dei due segni meno prima dell'espressione dell'energia potenziale, si deve osservare che il lavoro a cui si fa riferimento è quello delle forze elastiche, opposte a quelle applicate dall'esterno e tratteggiate in Fig. 9.26. Poiché il loro punto di applicazione si sposta in senso opposto al loro verso, il lavoro compiuto dalle forze elastiche sarà negativo e l'energia potenziale accumulata positiva.


 Image 1078

 Image 1079

 Image 1080

 Image 1081

 Image 1082

 Image 1083

 Image 1084

 Image 1085

300

9 Dinamica

F

F

Fig. 9.26. Energia elastica accumulata in trazione

Fig. 9.27. Energia accumulata in torsione

Fig. 9.28. Flessione di una trave a mensola

Torsione

Per analogia con il caso precedente,

M2

$U = 1 M$

t l

$$U = \frac{1}{2} F \Delta l = 1$$

(9.5.10)

$$= \frac{1}{2} \frac{F^2 l}{3 E J_p}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{F^2 l}{E J_p}$$

in cui ricordiamo che l è la lunghezza della trave, G il modulo di elasticità tangenziale, J_p il momento d'inerzia polare della sezione. La formula scritta è valida solo per travi di sezione circolare (Fig. 9.27).

Flessione

Il caso presentato nella Fig. 9.28 considera una trave incastrata ad un estremo e libera nell'altro, con un carico concentrato nell'estremità libera. Nel caso della flessione si può scrivere ancora che l'energia potenziale elastica accumulata nella deformazione è eguale al lavoro speso per produrre la deformazione stessa, cioè: $U = \frac{1}{2} F \Delta l = 1$

$$U = \frac{1}{2} F \Delta l = 1$$

.

(9.5.11)

$$= \frac{1}{2} \frac{F^2 l}{3 E J_p}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{F^2 l}{E J_p}$$

Energia cinetica

Mentre un punto materiale possiede soltanto energia cinetica di traslazione, un corpo esteso possiede sia energia cinetica dovuta al moto di traslazione, sia a quello di rotazione. Si ricorda che non è sempre vero che in un moto di traslazione la traiettoria

 Image 1086

 Image 1087

 Image 1088

 Image 1089

 Image 1090

 Image 1091

 Image 1092

 Image 1093

 Image 1094

 Image 1095

 Image 1096

9.5 Lavoro ed energia

301

di tutti i punti del corpo deve essere rettilinea. Esistono moti di traslazione in cui il corpo, pur percorrendo una traiettoria curvilinea con tutti i suoi punti, non ruota. Per un corpo esteso l'energia cinetica può definirsi come somma delle energie cinetiche di tutti gli elementi di massa che contiene, cioè:

"

"

E =

$\int \mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r} dm = 1$

$(\mathbf{r}_G + \mathbf{F} \times \mathbf{r}_{GP}) \cdot (\mathbf{r}_G + \mathbf{F} \times \mathbf{r}_{GP}) dm =$

2

M

M

= $1 \cdot rT$

$$FTJGF = 1Mv^2 + 1JG^*2 .$$

(9.5.12)

$2 GM \cdot rG + 1$

2

2

G

2

L'energia cinetica è una quantità scalare. L'asse baricentrico rispetto al quale si calcola il momento d'inerzia JG è quello che corrisponde all'asse della velocità angolare istantanea $*$.

L'ultima espressione indica che per un corpo rigido, nel moto più generale, l'energia cinetica è la somma del termine di traslazione, che il corpo avrebbe se fosse concentrato nel baricentro, più quello di rotazione intorno ad un asse istantaneo, individuabile attraverso la conoscenza dello stato di moto.

Lavoro delle forze d'inerzia

Consideriamo il lavoro delle forze e coppie d'inerzia per un corpo rigido che passa da una posizione 1 ad una posizione 2.

2

"

2

"

$d^2\mathbf{r}$

d^2H

L

= -

o

o

1, 2

M

$d\mathbf{r}$ -

J

$dH =$

dt^2

dt^2

1

1

2

"

2

"

= -

d

1

d

1

M

$\dot{\mathbf{r}} \circ \dot{\mathbf{r}} dt -$

J

$\mathbf{F} \circ \mathbf{F} dt =$

dt

2

dt

2

1

1

$= -(E_2 - E_1) = E_1 - E_2 .$

(9.5.13)

Il lavoro delle forze d'inerzia è quindi eguale all'incremento cambiato di segno dell'energia cinetica complessiva del corpo. Ricordando che il lavoro

compiuto global-mente dalle forze e coppie attive e da quelle d'inerzia deve essere nullo, perché il sistema di forze complessivo è equilibrato, si ha:

$$L_{1,2} + L =$$

$$1,2$$

$$0$$

$$L_{1,2} = -L =$$

$$1,2$$

$$E_2 - E_1$$

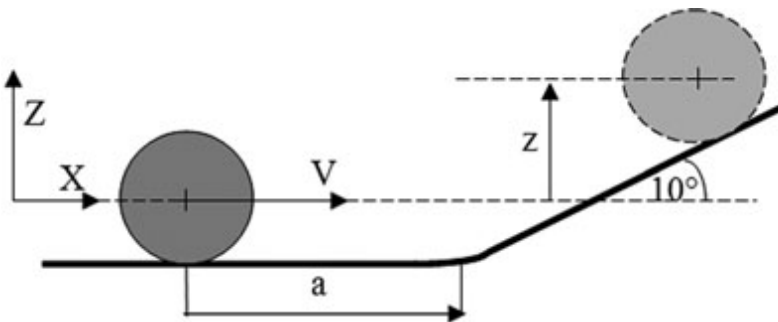
(9.5.14)

se dividiamo le forze dotate di potenziale da quelle non dotate di potenziale indicando con $L_C, 1, 2, L_{NC}, 1, 2$ le frazioni di lavoro da esse compiute ricordando che $L_C, 1, 2 = -\Delta U$

si ha:

$$L_{NC}, 1, 2 = \Delta U + \Delta E .$$

(9.5.15)



302

9 Dinamica

Fig. 9.29. Conservazione dell'energia cinetica

Nel caso il sistema sia conservativo il primo termine dell'equazione precedente è nullo e si ha il principio di conservazione dell'energia:

$$dL = -dU = dE$$

$$d(U + E) = 0$$

$$U + E = \text{cost.}$$

(9.5.16)

Le relazioni precedenti, valide per un sistema ideale nel quale si trascurino tutte le forze e coppie dissipative, esprimono il concetto che l'energia cinetica può aumentare o diminuire, dando luogo a corrispondenti diminuzioni o aumenti dell'energia potenziale. Il principio è di estrema utilità nella soluzione di molti problemi di Ingegneria.

Esempio 9.11. Un disco omogeneo di massa pari a 10 kg e raggio $R = 0,3$ m rotola senza strisciare, con velocità del suo centro pari a 15 m/s su una guida piana, costituita da un tratto orizzontale, seguito da un tratto inclinato. Trascurando l'effetto dell'attrito volvente, calcolare a quale quota giungerà il centro del disco, nel momento in cui questo si fermerà, prima di ridiscendere verso il basso (Fig. 9.29).

Si farà ricorso al principio di conservazione dell'energia. Nella posizione iniziale il disco ha una velocità del suo centro V e una velocità angolare $F = V/R = 15/0,3 =$

50 rad/s. La sua energia cinetica è la somma dell'energia cinetica di traslazione e di rotazione. L'energia totale nel punto iniziale considerato, per il quale si assume che la quota di riferimento per l'energia potenziale sia quella del baricentro della ruota, sarà quindi puramente cinetica, mentre nel punto finale il disco sarà fermo e avrà solo energia potenziale. Si ha allora:

2

$$E = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} M R^2 F^2 = Mgz$$

2

2

1

2

$$10 * 15^2 + 10 * 0,3^2 * 50^2$$

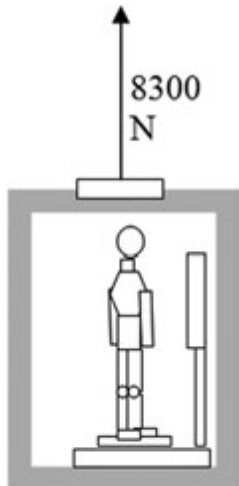
2

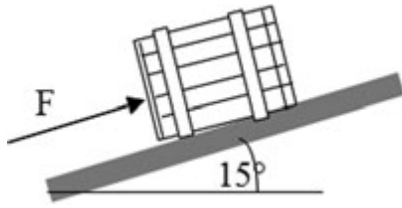
2

= z = 22 , 94 .

10 * 9 , 81

In questo caso l'energia cinetica di rotazione e quella di traslazione hanno espressioni particolarmente semplici poiché il disco ruota intorno ad un singolo asse e trasla in un'unica direzione. Si può tener conto dell'attrito volvente osservando che esso introduce una forza resistente data da $f_v * Mg$ essendo $f_v = u / R$ il coefficiente di attrito volvente.





9.5 Lavoro ed energia

303

Assumendo un coefficiente di attrito volvente pari a 0,1 la pendenza della rampa di 10° e la distanza della posizione iniziale della ruota dall'inizio della rampa di 3m si ha:

$$\Delta E = -\Delta U + \Delta L$$

2

(

)

$$- 1M * V^2 + M * R * F^2 = - Mgz - f_v M g a + z^2$$

2

sin 0

2

$$\Delta E = 1M * V^2 + M * R * F^2 - 0,1 * 10 * 9,81 * 3 = 10 * 9,81z^2 + 0,1$$

2

2

sin 0

1

2

$$10 * 152 + 10 * 0,3 * 502 - 0,1 * 10 * 9,81 * 3$$

2

2

(

)

$$= z = 20,57 \text{ m.}$$

$$10 * 9,81 + 0,1$$

sin 10

Esercizi

Equilibrio dinamico

1.

Una persona di massa pari a 75 kg sta in piedi sopra una bilancia all'interno di un ascensore.

Durante i primi 3 s del moto a partire dalla quiete la tensione dei cavi è pari a 8300 N.

Trovare il valore in N letto sulla bilancia in questo intervallo di tempo e la velocità verso l'alto dell'ascensore alla fine dei 3 s. La massa totale del sistema, ascensore, persona e bilancia è pari a 750 kg.

Risposta. $P = 830 \text{ N}$; $v = 3,77 \text{ m/s}$.

2.

La cassa del peso di 50 kg è ferma quando è applicato il carico. Determinare l'accelerazione della cassa, quando $F = 0$, $F = 150 \text{ N}$ e $F = 300 \text{ N}$. Il

coefficiente d'attrito di primo distacco $f_s = 0,20$, quello durante lo scorrimento della cassa $f = 0,15$. $a_1 = 1,12 \text{ m/s}^2$, $a_2 = -1,88 \text{ m/s}^2$

,

s_2

$$2 = -1,88 \text{ m}$$

s_2

$$a_1 = -4,88 \text{ m/s}^2$$

s_2

Risposta. $a = 1,12; -1,88$.

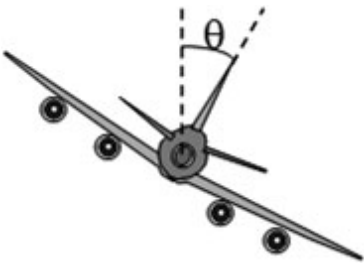


 Image 1120

 Image 1121

 Image 1122

304

9 Dinamica

3.

Determinare il corretto angolo H per un velivolo che vola a 600 km/h e compie una virata con raggio di 3 km . Si noti che la forza di portanza esercitata dall'aria sulle ali è normale alle superfici di queste.

Risposta. $H = 43,3^\circ$.

4.

Un ragazzo fa ruotare una palla di massa 50 g attaccata ad un filo di 1 m di lunghezza in modo tale che la palla tracci un cerchio nel piano verticale come mostrato in figura.

Qual è la minima velocità che deve avere la palla nella posizione 1? Se questa velocità è mantenuta costante durante tutto il giro calcolare la tensione T del filo nel punto 2.

Risposta. $T = 0,981 \text{ N}$.

5.

Un elicottero antincendio staziona sopra un lago dove riempie il suo secchio d'acqua.

Quindi si solleva lentamente e inizia un volo orizzontale, sostanzialmente da fermo, con un'accelerazione orizzontale a_0 . Si ottenga un'espressione di H per la quale \dot{H} è massimo.

Determinare anche la tensione T nel cavo come funzione di H e della massa del secchio riempito.

Risposta. $H = 45^\circ$, $T = P \cos H + P \dot{H}^2 r$.

g

Energia potenziale elastica

6.

Un cilindro di 6 kg viene rilasciato da una posizione di riposo e cade sulla molla che è stata precaricata inizialmente con una corsa di 50 mm mediante il piattello vincolato mostrato in figura. Se la rigidità della molla è 4 kN/m calcolare la compressione addizionale della molla provocata dalla caduta del cilindro, prima che questo rimbalzi.

Risposta. $3 = 29,4 \text{ mm}$.

 Image 1123

 Image 1124

 Image 1125

 Image 1126

9.5 Lavoro ed energia

305

7.

Un palo di 500 kg è spinto da una mazza di 800 kg che cade da 3 m sull'estremità del palo.

Il palo avanza di 6 mm e non si ha rimbalzo. Trovare la resistenza opposta alla penetrazione del palo, assunta costante, e l'energia dissipata nella deformazione della cima del palo.

Risposta. $R = 943 \text{ N}$! $E = 9058 \text{ J}$.

8.

Il respingente all'estremità di un carro ferroviario ha una rigidezza di 0,7 MN/m e si impegna con un respingente identico di un altro carro. Il primo carro ha una massa di 10000 kg e una velocità di 1.8 m/s il secondo ha una massa di 15000 kg e una velocità di 0.6 m/s nella stessa direzione. Trovare:

•

la velocità con cui i carri si muovono durante l'impatto;

•

l'energia cinetica perduta dal sistema dei due carri nella fase d'impatto e la compressione di ciascun respingente per immagazzinarla;

•

la velocità di ciascun carro alla separazione se solo metà dell'energia immagazzinata è restituita.

Risposta. $v_2 = 1,08 \text{ m/s}$; $E = 4320 \text{ J}$; $2,01 \text{ m/s}$, e $0,15 \text{ m/s}$.

s

9.

Una tennista colpisce la palla con la racchetta mentre la palla sta ancora salendo. La velocità della palla prima del colpo è $v_1 = 15 \text{ m/s}$ e dopo $v_2 = 22 \text{ m/s}$ con la direzione mostrata in figura. Se la palla di 60 g è in contatto con la racchetta per $0,05 \text{ s}$, determinare il modulo della forza media scambiata e l'angolo che essa forma con l'orizzontale.

Risposta. $F = 43 \text{ N}$;

$\theta = 8,68^\circ$.

 Image 1127

 Image 1128

 Image 1129

 Image 1130

 Image 1131

 Image 1132

 Image 1133

306

9 Dinamica

10. Un getto d'acqua di portata 30 kg/s e velocità 40 m/s incide su una paletta avente un profilo corrispondente a un quarto di circonferenza. Il getto fuoriesce con la stessa velocità ma in direzione verticale dalla paletta. Calcolare la spinta del getto sulla pala.

$$F = 1692 \text{ N.}$$

11. L'auto B è inizialmente ferma ed è colpita dall'auto A, che si muove con velocità v . La massa della macchina B è pm , dove m è la massa della macchina A e p è una costante positiva. Se il coefficiente di restituzione è $e = 0, 1$ trovare le espressioni delle velocità delle due vetture dopo la collisione, in funzione di p e v . Si valutino le espressioni trovate per $p = 0, 5$

$$(1 - 0, 1p)v$$

$$(1, 1)v$$

$$v_+ =$$

$$=$$

$$\cdot$$

$$1$$

$$(1 + p)$$

$$v_+$$

$$2$$

$$(1 + p)$$

Risposta. Per $p = 0, 5$

$$(1 - 0, 1 * 0, 5)v$$

$$(1, 1)v$$

$$v_+ =$$

$$= 0,63v$$

$$v_+ =$$

$$= 0,73v.$$

1

(1,5)

2

(1,5)

12. Nel gioco del biliardo la palla A deve colpire di striscio il pallino nella posizione mostrata in figura per mandarla nella buca con la velocità v . La palla A ha una velocità v_2

1 prima

dell'impatto e una velocità v dopo l'impatto. Il coefficiente di restituzione è 0,9. Ambedue 1

le palle hanno la stessa massa e lo stesso diametro. Calcolare l'angolo di rimbalzo H e la frazione di energia cinetica che viene persa in seguito all'impatto.

Risposta. $H = 2,86^\circ$ $E / E = 0,0475$.

 Image 1134

 Image 1135

 Image 1136

9.5 Lavoro ed energia

307

13. La macchina per prove di collisione della figura viene analizzata dopo un esperimento nel quale la velocità della vettura all'impatto era di 38,9 km/h. La massa della vettura era di 1100 kg e il suo frontale si accorcia nell'urto di 0,8 m. Si calcoli la forza media scambiata con l'ostacolo durante l'urto. Poiché la barriera è immobile, come prima approssimazione si consideri l'auto formata da due parti. La parte non danneggiata trasla di 0,8 m durante l'urto con una decelerazione media di 8g. La parte danneggiata ha una massa di 450 kg e la sua decelerazione è di 4 g. Determinare la forza scambiata durante l'urto, analizzando le due parti separatamente e trovare la perdita d'energia durante l'urto.

Risposta. $F_c = 6,84 \cdot 10^4 \text{ N}$.

Conservazione del momento della quantità di moto

14. Le due sfere di massa eguale possono anche scorrere lungo la guida radiale. Se esse sono inizialmente poste alla distanza r dall'asse di rotazione, con il sistema rotante con velocità angolare F_0 , trovare il nuovo valore della velocità angolare dopo che le sfere vengono rilasciate e si portano al raggio $2r$. Trovare anche la frazione d'energia cinetica che viene persa in questa operazione. Si trascuri la piccola porzione di energia cinetica posseduta dalle aste.

Risposta. $F = F_0 / 4, \Delta E / E = 0,75$.

Equilibrio dinamico

15. Il ciclista frena durante la discesa su un pendio inclinato di 10° . Quale decelerazione potrebbe causare la possibilità di ribaltamento in avanti, intorno alla ruota anteriore?. Il baricentro dell'intero sistema ciclista più bici è in G.

Risposta. 0,510 g.

 Image 1137

 Image 1138

 Image 1139

9 Dinamica

16. Il baricentro del disco di massa 10 kg e raggio 150 mm è fuori asse di 10 mm. Se G è nella posizione indicata in figura quando la ruota rotola senza strisciare sul fondo della guida, con velocità angolare di 10 rad/s, calcolare la forza P scambiata tra la ruota e la guida.

Risposta. $P = 100,3 \text{ N}$.

17. In uno studio del danno fisico durante l'impatto della testa contro il pannello della strumentazione durante arresti improvvisi o incidenti, nel quale vengono usate cinture alla vita senza passanti sul torace, viene analizzato il modello umano della figura. L'anca viene assunta come fissa rispetto alla macchina e il torso sopra l'anca viene considerato come un corpo rigido di massa m ruotante liberamente intorno ad O. Il centro di gravità del torso è G con il segmento OG verticale al momento dell'impatto. Il raggio d'inerzia del torso intorno ad O sia k_0 . Se la vettura si arresta bruscamente con una decelerazione costante a , determinare la velocità v relativa alla macchina con cui la testa del modello colpisce il pannello degli strumenti. Si considerino i valori $m = 50 \text{ kg}$, $\bar{r} = 450 \text{ mm}$, $r = 800 \text{ mm}$, $k_0 = 550 \text{ mm}$, $H = 45^\circ$, $\theta = 10^\circ$, e si calcoli v .

Risposta. $v = 11,49 \text{ m/s}$.

18. Una barra di 0,6 m di lunghezza è posta in rotazione nel suo punto medio da un albero collegato ad un motore. La barra, di massa trascurabile, porta alle sue estremità due sfere di massa 3 e 2 kg. I centri delle sfere distano 0,3 m dall'asse di rotazione. Determinare la forza orizzontale che grava sui cuscinetti quando la barra è posta in rotazione da una coppia di 10 Nm.

Risposta. $F_i = -5,2 = 11 \text{ N}$.

 Image 1140

 Image 1141

 Image 1142

 Image 1143

9.5 Lavoro ed energia

309

19. Nel manovellismo in figura il raggio della manovella è $r = 120$ mm, la lunghezza della biella 260 mm, la massa della biella 2,5 kg, quella del pistone 1,8 kg, la massa della manovella, costituita da un'asta sottile omogenea, 2,0 kg, il diametro del pistone 150 mm.

Supponendo di poter approssimare la biella con un sistema equivalente di due masse uguali, una nel piede di biella, l'altra nel perno di manovella e considerando una pressione di 85 bar all'interno del cilindro e ammettendo che il sistema sia inizialmente in quiete, si calcoli la coppia motrice e l'accelerazione angolare della manovella.

Risposta. $a_m = \ddot{\theta}r$ e $\ddot{x} = \ddot{\theta}r \cos(30)$.

20. Un aereo da trasporto passeggeri al decollo a pieno carico ha massa totale pari a 360 t e la portanza è pari al 60% del peso dell'aereo a 200 km/h. Complessivamente i carrelli del velivolo hanno 16 ruote con diametro $d = 1150$ mm, con coefficiente di attrito volvente pari a $f = 0,01 + 1,5 * 10^{-6}F^2$, essendo F la velocità angolare delle ruote in rad/s. Calcolare la forza orizzontale resistente in corrispondenza di ogni ruota all'inizio del decollo e a 200 km/h.

Risposta. $F_r = 883$ N (start) 1236 N (200 km/h).

21. Nel quadrilatero articolato in figura, di cui è completamente nota la geometria, una forza di 10 N insiste sul lato CD. Calcolare la coppia da applicare all'asta AB per mantenere il quadrilatero in equilibrio statico. Calcolare anche le reazioni in A e D.

Risposta.

$$l_{CD} = 1 * \sin 45 + 3 * \sin 30 = 2,55 \text{ m} \quad F_{BC} * 2,55 = 10$$

$$F_{BC} = 3,92 \text{ N}$$

$\sin 60$

$$3,92 * \cos 30 * \sin 45 - 3,92 \sin 30 * \cos 45 = M = 1,01 \text{ Nm}.$$

 Image 1144

 Image 1145

 Image 1146

 Image 1147

 Image 1148

 Image 1149

 Image 1150

310

9 Dinamica

22. La massa del pendolo A in figura è di 2 kg, quella del pendolo B di 5 kg. Il filo di sospensione è lungo 2 m per ambedue. L'inclinazione iniziale del pendolo A è di 30° . Trovare l'angolo a cui si portano le due masse dopo l'urto assumendo un coefficiente di restituzione pari a 0.5.

Risposta.

$$(2 - 2 \cdot 5) * 2,29$$

m

$v^+ =$

$= -$

A

0,82

7

s

m

$$v+ = 2,5 * (1,5) * 2,29 =$$

.

B

1,23

7

s

23. Una catena flessibile priva di attrito, di lunghezza totale pari a 3 m, è poggiata su un gradino sporgente in modo tale che solo un metro di essa si trovi in giacitura verticale. Determinare il tempo richiesto dalla catena per scivolare completamente dal gradino, una volta rilasciata.

Risposta. $t = 1,09$ s.

24. Nella moto rappresentata in figura, di massa pari a 250 kg considerando anche il conducente, gli assi delle ruote distano di 1.35 m. Il baricentro della moto si trova 0.6 m avanti alla ruota posteriore e 0.68 m sopra il livello del terreno. Se si frena solo con la ruota posteriore determinare la massima decelerazione assumendo un coefficiente d'attrito pari a 0.4:

•

quando la moto viaggia in rettilineo;

•

quando la moto viaggia in una curva di 60 m di raggio a 65 km/h.

Trascurare l'inclinazione della moto in curva.

 Image 1151

 Image 1152

 Image 1153

 Image 1154

 Image 1155

 Image 1156

 Image 1157

9.5 Lavoro ed energia

311

25. *Moto dei gravi:*

Se un corpo è lasciato cadere liberamente sotto l'azione del campo della gravità, esso sarà soggetto alla sua forza peso, alla resistenza dell'aria e alla sua forza d'inerzia. La forza d'inerzia di un corpo è applicata nel suo baricentro, ha la direzione dell'accelerazione, verso opposto ed è eguale in modulo a $-ma_G$, essendo a_G l'accelerazione del baricentro del corpo. Si determini la legge del moto di caduta nel transitorio e a regime.

Risposta. In un corpo che cade liberamente sotto l'azione della forza di gravità la resistenza dell'aria, proporzionale al quadrato della velocità del corpo, la forza peso e la forza d'inerzia costituiscono un sistema in equilibrio. Se il corpo parte da fermo la resistenza dell'aria è inizialmente nulla e la forza peso mg è eguale alla forza d'inerzia $-ma_G$. Risulta quindi che l'accelerazione assunta dal corpo è eguale all'accelerazione di gravità. Mentre il corpo accelera la velocità cresce e così pure la resistenza dell'aria. Poiché il sistema delle tre forze è equilibrato e le forze hanno la stessa direzione si ha: $P - R = ma_G$

$$a_G = PR = mg - R$$

m

m

al crescere della velocità l'accelerazione del baricentro del corpo decresce sino ad annullarsi quando la resistenza dell'aria diventa eguale alla forza peso. Da quel momento il moto diverrà uniforme e la forza d'inerzia scomparirà. La situazione di moto uniforme può facilmente essere analizzata scrivendo che il peso del corpo è bilanciato dalla resistenza aerodinamica opposta dall'aria, che si può ritenere (vedi il paragrafo sulle forze di tipo aerodinamico più avanti) proporzionale all'area frontale esposta dal corpo all'aria, alla densità dell'aria, al quadrato della velocità del corpo, attraverso un coefficiente che prende il nome di coefficiente di resistenza aerodinamica.-

1

2P

$P = mg = cR \rho v^2 A$ da cui $v =$

.

2

$cR \rho A$

In cui v è la velocità del corpo a regime, A la sezione frontale, ρ la densità dell'aria, cR il coefficiente di resistenza aerodinamica. Se si vuole analizzare anche la fase

 Image 1158

 Image 1159

 Image 1160

 Image 1161


 Image 1162

 Image 1163

 Image 1164

 Image 1165

 Image 1166

 Image 1167

 Image 1168

 Image 1169

 Image 1170

 Image 1171

 Image 1172

 Image 1173

 Image 1174

 Image 1175

 Image 1176

 Image 1177

 Image 1178

 Image 1179

 Image 1180

 Image 1181


 Image 1182

 Image 1183

 Image 1184

 Image 1185

 Image 1186

 Image 1187

 Image 1188

312

9 Dinamica

d'accelerazione, le equazioni del moto sono:

$$P = 1 \text{ cr? } y^2 A = m \ddot{y} = 0$$

$$\ddot{y} = d \dot{y} = g - c R? A \dot{y}^2 .$$

2

dt

2m

L'equazione differenziale scritta è del tipo $d \dot{y} = k$

. Essa permette

dt

2 ·

y^2 con $k_1 = g$, $k_2 = c R? A$

$2m$

di separare le variabili ottenendo:

$d'y$

$\sqrt{}$

$\sqrt{}$

$= dt$

ponendo

$a =$

k_1

$b =$

k_2

si ottiene:

$k_1 - k_2 \cdot y^2$

$d'y$

$= 1$

1

$+ 1$

$d(a + b'y) - d(a - b'y)$

$($

$d'y = 1$

$$d'y = dt$$

$$a - b'y)(a + b'y)$$

$$2a$$

$$a + b'y$$

$$a - b'y$$

$$2ab$$

$$a + b'y$$

$$a - b'y$$

si ha poi, integrando:

[

]

v

"

v

"

t

"

1

v

[d(a + b'y)

$$d(a - b \cdot y)$$

1

$$(a + b \cdot y)$$

$$d \cdot y -$$

$$d \cdot y \int =$$

dt;

ln

= t

2ab

$$a + b \cdot y$$

$$a - b \cdot y$$

2ab

$$(a - b \cdot y) 0$$

0

0

0

1

$$(a + bv)$$

$$(a + bv)$$

ln

= t

$$= e^{2abt}; (a + bv) = (a - bv) * e^{2abt}$$

2ab

(a - bv)

(a - bv)

-

$$2gm (e^{2abt} - 1)$$

$$b(1 + e^{-2abt})v = a(e^{2abt} - 1) v = a(e^{2abt} - 1) =$$

.

$$b(1 + e^{2abt})$$

$$cR^2A (1 + e^{2abt})$$

L'ultima equazione indica che per tempi lunghi i due

termini esponenziali si cancellano

a vicenda e la velocità assume il valore asintotico

$2gm$, già calcolato in condizioni di

$$cR^2A$$

regime. Per $t = 0$ la velocità è zero (si è assunto, infatti, nello svolgimento dell'integrazione che fosse $v = 0$ per $t = 0$). Per tempi intermedi si osserva una fase d'accelerazione decrescente.

Per trattare un caso pratico ci si riferirà al caso del paracadutista in caduta libera con: $m = 75 \text{ kg}$ $cR = 0,3 \text{ A} = 1,8 * 0,35 \text{ m}^2 = 0,63 \text{ m}^2$

$$\rho = 1,27 \text{ kg / m}^3.$$

Il diagramma mostra l'andamento della velocità in funzione del tempo, con i dati assunti.

La velocità varia in modo pressoché lineare nei primi secondi, per cambiare pendenza in seguito. La pendenza iniziale della curva, come ci si poteva aspettare è prossima a g . Il valore asintotico della velocità del paracadutista in caduta libera è di circa 78 m/s, 280 km/h.

Il diagramma mostra anche che, se ci si limita ai primi 5–10 secondi non si commette un grande errore se si trascura la resistenza dell'aria.

 Image 1189

9.6 Piccole oscillazioni

313

9.6 Piccole oscillazioni

Questo paragrafo prende in esame l'analisi del moto oscillatorio dei corpi e le forze che lo generano. Tutti i corpi dotati di massa ed elasticità sono capaci di vibrare, per cui nella progettazione di macchine e strutture si deve sempre considerare questo aspetto. Nel caso della biomeccanica, dopo aver esposto i principi fondamentali della teoria, ci soffermeremo sull'analisi delle vibrazioni di sistemi biomeccanici, ad esempio le vibrazioni mano-braccio e quelle whole-body negli ambienti di lavoro.

Si tratta di situazioni che danno luogo a tipiche patologie, che richiedono cura ed attenzione.

Esistono due classi di vibrazioni, le vibrazioni libere e forzate. Nel caso delle prime il sistema vibrerà sempre con una o più delle sue frequenze caratteristiche, chiamate frequenze naturali, dipendenti dalla distribuzione delle proprietà di massa, elasticità e smorzamento. Nel caso delle seconde il sistema vibra sotto l'azione di forze esterne con la frequenza di queste ultime. Se la frequenza delle forze eccitatrici coincide con una delle frequenze naturali del sistema si instaura una condizione di risonanza e le ampiezze dell'oscillazione crescono con effetti talvolta disastrosi. Sono ben noti i casi di grandi strutture come ponti, grattacieli, aerei, nelle quali la

risonanza ha prodotto il collasso totale o danni importanti. Lo studio delle frequenze proprie dei sistemi è quindi d'importanza fondamentale.

Un limite alla crescita delle ampiezze di oscillazione in risonanza è posto dalla presenza di cause smorzanti, interne od esterne. Un esempio delle prime è lo smorzamento interno dei materiali, cioè l'attrito che si sviluppa nella struttura interna sul bordo dei grani cristallini o all'interno di questi. Tutti i materiali possiedono, in maggiore o minor misura, un certo grado di smorzamento interno. La gomma è un materiale ad elevato smorzamento, l'acciaio ha invece uno smorzamento molto basso. È

anche possibile che ad un sistema siano applicati organi smorzanti esterni, come nel caso degli ammortizzatori delle autovetture. Senza gli ammortizzatori una vettura, sollecitata ad oscillare dalle asperità della strada, continuerebbe nel suo moto vibratorio a lungo, con relativo fastidio dei passeggeri del veicolo e diminuzione della tenuta di strada.

Sappiamo che le possibilità di movimento di un corpo sono determinate dai suoi gradi di libertà. Un corpo puntiforme nello spazio potrà oscillare lungo tre direzioni ortogonali, un corpo rigido esteso potrà compiere movimenti oscillatori rettilinei secondo tre direzioni ortogonali, e oscillazioni angolari intorno a queste direzioni. Un corpo esteso deformabile avrà infiniti gradi di libertà e quindi richiederebbe un infini-
Fig. 9.30. Oscillatore semplice

 Image 1190

 Image 1191

 Image 1192

 Image 1193

 Image 1194

314

9 Dinamica

Fig. 9.31. a) Ampiezza e periodo di un'oscillazione armonica; b) il moto armonico come proiezione di un moto circolare

to numero di coordinate per la descrizione del suo moto. In molti casi il sistema potrà però essere ricondotto con una certa approssimazione ad uno rigido equivalente con pochi gradi di libertà. Il moto oscillatorio può ripetersi regolarmente ad eguali intervalli di tempo. In questo caso il moto è periodico, il periodo è appunto l'intervallo di tempo connesso alla ripetizione. Esistono anche oscillazioni che non mostrano una palese regolarità, come nel caso dei terremoti. Se nel sistema della Fig. 9.30 instauriamo una vibrazione libera, dando un piccolo spostamento nella direzione verticale alla massa m rispetto alla posizione di equilibrio e lasciandolo quindi libero di oscillare, un qualunque strumento di misura dell'ampiezza di vibrazione ci mostrerebbe una legge del moto $x(t)$ rappresentata dall'equazione seguente:

$$x = A \sin 2\pi t / T .$$

(9.6.1)

T

Nell'equazione precedente A è l'ampiezza dell'oscillazione, T il periodo. Il reciproco del periodo $f = 1/T$ è la frequenza dell'oscillazione, il termine $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ prende il T

T

nome di pulsazione. La legge dell'oscillazione in questo semplice caso è sinusoidale, il moto è armonico. Questo può talvolta essere rappresentato come proiezione su uno degli assi coordinati del moto circolare di un punto, o meglio del vettore che lo rappresenta.

La velocità e l'accelerazione nel moto armonico si ottengono per semplice derivazione della legge del moto (9.6.1):

(

>)

$$\dot{x} = FA \cos(Ft) = FA \sin Ft + 2$$

(9.6.2)

$$\ddot{x} = -F2A \cos(Ft) = FA \sin(Ft + \pi) .$$

Image 1195

Image 1196

Image 1197

9.6 Piccole oscillazioni

315

Quindi la velocità e l'accelerazione sono anch'esse armoniche con la stessa frequenza dello spostamento, ma in anticipo di fase rispetto a questo, rispettivamente di $\pi/2$

e di π . L'ampiezza della velocità è FA , quella dell'accelerazione $-F2A$, per cui quest'ultima è proporzionale allo spostamento, ma con segno opposto.

Forma esponenziale della legge del moto

Ricordando la relazione di Eulero:

$$e^{iH} = \cos H + i \sin H .$$

(9.6.3)

Un vettore rotante con velocità angolare F , di ampiezza A può essere rappresentato nel diagramma di Argand dalla variabile complessa z :

$$z = Ae^{iFt} = A \cos Ft + iA \sin Ft = x + iy .$$

(9.6.4)

La quantità z viene spesso chiamata senoide complessa, essendo x e y le sue parti reale ed immaginaria. La sua complessa coniugata:

$$z^* = Ae^{-iFt} = A \cos Ft - iA \sin Ft = x - iy .$$

(9.6.5)

Rappresenta un vettore rotante con velocità angolare $-F$ in senso opposto a z , cioè orario. È facile vedere che la componente reale dell'oscillazione x può essere espressa mediante z e z^* come:

$$x = \frac{1}{2} (z + z^*) = A \cos(Ft) = \text{Re} (Ae^{iFt}) = \text{Re}(z) .$$

(9.6.6)

2

Moti periodici

Non sempre accade che un moto oscillatorio avvenga con un'unica frequenza. Se consideriamo ad esempio la corda di un violino, questa vibra con una legge oscillatoria che contiene una frequenza fondamentale f e i suoi multipli, o armoniche, $2f$, $3f$, $4f$

Analogamente se un sistema con diversi gradi di libertà è messo in vibrazione è probabile che molte delle frequenze naturali del sistema siano presenti nella sua risposta oscillatoria. Il moto sarà comunque periodico, cioè si ripeterà identicamente ad intervalli regolari di tempo, individuati dal periodo T .

Secondo Fourier (vedi note storiche all'inizio del testo) ogni moto periodico può scomporsi in una somma di moti armonici di varia ampiezza e frequenza multipla della frequenza fondamentale del moto. Se $x(t)$ è una funzione periodica con periodo T , essa può essere rappresentata dalla serie infinita di Fourier:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(F_1t) + a_2 \cos(F_2t) + a_3 \cos(F_3t) + \dots$$

2

$$b_1 \cos(F_1t) + b_2 \sin(F_2t) + b_3 \sin(F_3t) + \dots$$

(9.6.7)

Dove $F1 = 2 > F$

T

n = nF1.


 Image 1198

 Image 1199

 Image 1200

 Image 1201

 Image 1202

 Image 1203

 Image 1204

 Image 1205

 Image 1206

 Image 1207

 Image 1208

 Image 1209

 Image 1210

 Image 1211

 Image 1212

 Image 1213


 Image 1214

 Image 1215

 Image 1216

 Image 1217


 Image 1218

 Image 1219

 Image 1220

 Image 1221

 Image 1222

 Image 1223

 Image 1224

 Image 1225

 Image 1226

 Image 1227

 Image 1228

 Image 1229

 Image 1230

 Image 1231

 Image 1232

 Image 1233


 Image 1234

 Image 1235

 Image 1236

 Image 1237


 Image 1238

 Image 1239

 Image 1240

 Image 1241

 Image 1242

 Image 1243

 Image 1244

 Image 1245

 Image 1246

 Image 1247

 Image 1248

 Image 1249

 Image 1250

 Image 1251

 Image 1252

 Image 1253


 Image 1254

 Image 1255

 Image 1256

 Image 1257


 Image 1258

 Image 1259

 Image 1260

 Image 1261

 Image 1262

 Image 1263

 Image 1264

 Image 1265

 Image 1266

 Image 1267

 Image 1268


 Image 1269


 Image 1270

 Image 1271

 Image 1272

 Image 1273

 Image 1274

 Image 1275


 Image 1276

 Image 1277

 Image 1278

 Image 1279

 Image 1280

 Image 1281

 Image 1282

 Image 1283

 Image 1284

 Image 1285

 Image 1286

 Image 1287

 Image 1288


 Image 1289


 Image 1290

 Image 1291

 Image 1292

 Image 1293

 Image 1294

 Image 1295


 Image 1296

 Image 1297

 Image 1298

 Image 1299

 Image 1300

 Image 1301

 Image 1302

 Image 1303

 Image 1304

 Image 1305

 Image 1306

 Image 1307

 Image 1308

 Image 1309

 Image 1310

 Image 1311

 Image 1312

 Image 1313


 Image 1314

 Image 1315


 Image 1316

 Image 1317

 Image 1318

 Image 1319

 Image 1320

 Image 1321

 Image 1322

 Image 1323

 Image 1324

 Image 1325

 Image 1326

 Image 1327

 Image 1328

 Image 1329


 Image 1330

 Image 1331

 Image 1332

 Image 1333

 Image 1334

 Image 1335


 Image 1336

 Image 1337

 Image 1338

 Image 1339

 Image 1340

 Image 1341

 Image 1342

 Image 1343

 Image 1344

 Image 1345

 Image 1346

 Image 1347

 Image 1348


 Image 1349


 Image 1350

 Image 1351

 Image 1352

 Image 1353

 Image 1354

 Image 1355


 Image 1356

 Image 1357

 Image 1358

 Image 1359

 Image 1360

 Image 1361

 Image 1362

 Image 1363

 Image 1364

 Image 1365

 Image 1366

 Image 1367

 Image 1368


 Image 1369


 Image 1370

 Image 1371

 Image 1372

 Image 1373

 Image 1374

 Image 1375


 Image 1376

 Image 1377

 Image 1378

 Image 1379

 Image 1380

 Image 1381

 Image 1382

 Image 1383

 Image 1384

 Image 1385

 Image 1386

 Image 1387

 Image 1388


 Image 1389

 Image 1390

 Image 1391

 Image 1392

 Image 1393

 Image 1394


 Image 1395

 Image 1396

 Image 1397

 Image 1398

 Image 1399

 Image 1400

 Image 1401

 Image 1402

 Image 1403

 Image 1404

 Image 1405

 Image 1406

 Image 1407

 Image 1408


 Image 1409


 Image 1410

 Image 1411

 Image 1412

 Image 1413

 Image 1414

 Image 1415


 Image 1416

 Image 1417

 Image 1418

 Image 1419

 Image 1420

 Image 1421

 Image 1422

 Image 1423

 Image 1424

 Image 1425

 Image 1426

 Image 1427

 Image 1428


 Image 1429


 Image 1430

 Image 1431

 Image 1432

 Image 1433

 Image 1434

 Image 1435


 Image 1436

 Image 1437

 Image 1438

 Image 1439

 Image 1440

 Image 1441

 Image 1442

 Image 1443

 Image 1444

 Image 1445

 Image 1446

 Image 1447

 Image 1448


 Image 1449


 Image 1450

 Image 1451

 Image 1452

 Image 1453

 Image 1454

 Image 1455


 Image 1456

 Image 1457

 Image 1458

 Image 1459

 Image 1460

 Image 1461

 Image 1462

 Image 1463

 Image 1464

 Image 1465

 Image 1466

 Image 1467

 Image 1468

 Image 1469

 Image 1470

 Image 1471

 Image 1472

 Image 1473


 Image 1474

 Image 1475


 Image 1476

 Image 1477

 Image 1478

 Image 1479

 Image 1480

 Image 1481

 Image 1482

 Image 1483

 Image 1484

 Image 1485

 Image 1486

 Image 1487

 Image 1488


 Image 1489


 Image 1490

 Image 1491

 Image 1492

 Image 1493

 Image 1494

 Image 1495


 Image 1496

 Image 1497

 Image 1498

 Image 1499

 Image 1500

 Image 1501

 Image 1502

 Image 1503

 Image 1504

 Image 1505

 Image 1506

 Image 1507

 Image 1508

 Image 1509

 Image 1510

 Image 1511

 Image 1512

 Image 1513


 Image 1514

 Image 1515


 Image 1516

 Image 1517

 Image 1518

 Image 1519

 Image 1520

 Image 1521

 Image 1522

 Image 1523

 Image 1524

 Image 1525

 Image 1526

 Image 1527

 Image 1528


 Image 1529


 Image 1530

 Image 1531

 Image 1532

 Image 1533

 Image 1534

 Image 1535


 Image 1536

 Image 1537

 Image 1538

 Image 1539

 Image 1540

 Image 1541

 Image 1542

 Image 1543

 Image 1544

 Image 1545

 Image 1546

 Image 1547

 Image 1548


 Image 1549


 Image 1550

 Image 1551

 Image 1552

 Image 1553

 Image 1554

 Image 1555


 Image 1556

 Image 1557

 Image 1558

 Image 1559

 Image 1560

 Image 1561

 Image 1562

 Image 1563

 Image 1564

 Image 1565

 Image 1566

 Image 1567

 Image 1568


 Image 1569


 Image 1570

 Image 1571

 Image 1572

 Image 1573

 Image 1574

 Image 1575


 Image 1576

 Image 1577

 Image 1578

 Image 1579

 Image 1580

 Image 1581

 Image 1582

 Image 1583

 Image 1584

 Image 1585

 Image 1586

 Image 1587

 Image 1588


 Image 1589


 Image 1590

 Image 1591

 Image 1592

 Image 1593

 Image 1594

 Image 1595


 Image 1596

 Image 1597

 Image 1598

 Image 1599

 Image 1600

 Image 1601

 Image 1602

 Image 1603

 Image 1604

 Image 1605

 Image 1606

 Image 1607

 Image 1608


 Image 1609


 Image 1610

 Image 1611

 Image 1612

 Image 1613

 Image 1614

 Image 1615


 Image 1616

 Image 1617

 Image 1618

 Image 1619

 Image 1620

 Image 1621

 Image 1622

 Image 1623

 Image 1624

 Image 1625

 Image 1626

 Image 1627

 Image 1628


 Image 1629


 Image 1630

 Image 1631

 Image 1632

 Image 1633

 Image 1634

 Image 1635


 Image 1636

 Image 1637

 Image 1638

 Image 1639

 Image 1640

 Image 1641

 Image 1642

 Image 1643

 Image 1644

 Image 1645

 Image 1646

 Image 1647

 Image 1648

 Image 1649

 Image 1650

 Image 1651

 Image 1652

 Image 1653


 Image 1654

 Image 1655

 Image 1656

 Image 1657


 Image 1658

 Image 1659


 Image 1660

 Image 1661

 Image 1662

 Image 1663

 Image 1664

 Image 1665

 Image 1666

 Image 1667

 Image 1668


 Image 1669


 Image 1670

 Image 1671

 Image 1672

 Image 1673

 Image 1674

 Image 1675


 Image 1676

 Image 1677

 Image 1678

 Image 1679

 Image 1680

 Image 1681

 Image 1682

 Image 1683

 Image 1684

 Image 1685

 Image 1686

 Image 1687

 Image 1688


 Image 1689


 Image 1690

 Image 1691

 Image 1692

 Image 1693

 Image 1694

 Image 1695


 Image 1696

 Image 1697

 Image 1698

 Image 1699

 Image 1700

 Image 1701

 Image 1702

 Image 1703

 Image 1704

 Image 1705

 Image 1706

 Image 1707

 Image 1708


 Image 1709

 Image 1710

 Image 1711

 Image 1712

 Image 1713

 Image 1714


 Image 1715

 Image 1716

 Image 1717

 Image 1718

 Image 1719

 Image 1720

 Image 1721

 Image 1722

 Image 1723

 Image 1724

 Image 1725

 Image 1726

 Image 1727

 Image 1728

 Image 1729

 Image 1730

 Image 1731

 Image 1732

 Image 1733

 Image 1734


 Image 1735

 Image 1736

 Image 1737

 Image 1738

 Image 1739

 Image 1740

 Image 1741

 Image 1742

 Image 1743

 Image 1744

 Image 1745

 Image 1746

 Image 1747

 Image 1748


 Image 1749


 Image 1750

 Image 1751

 Image 1752

 Image 1753

 Image 1754

 Image 1755


 Image 1756

 Image 1757

 Image 1758

 Image 1759

 Image 1760

 Image 1761

 Image 1762

 Image 1763

 Image 1764

 Image 1765

 Image 1766

 Image 1767

 Image 1768


 Image 1769

 Image 1770

 Image 1771

 Image 1772

 Image 1773

 Image 1774


 Image 1775

 Image 1776

 Image 1777

 Image 1778

 Image 1779

 Image 1780

 Image 1781

 Image 1782

 Image 1783

 Image 1784

 Image 1785

 Image 1786

 Image 1787

 Image 1788

 Image 1789

 Image 1790

 Image 1791

 Image 1792

 Image 1793


 Image 1794

 Image 1795


 Image 1796

 Image 1797

 Image 1798

 Image 1799

 Image 1800

 Image 1801

 Image 1802

 Image 1803

 Image 1804

 Image 1805

 Image 1806

 Image 1807

 Image 1808


 Image 1809


 Image 1810

 Image 1811

 Image 1812

 Image 1813

 Image 1814

 Image 1815


 Image 1816

 Image 1817

 Image 1818

 Image 1819

 Image 1820

 Image 1821

 Image 1822

 Image 1823

 Image 1824

 Image 1825

 Image 1826

 Image 1827

 Image 1828


 Image 1829


 Image 1830

 Image 1831

 Image 1832

 Image 1833

 Image 1834

 Image 1835


 Image 1836

 Image 1837

 Image 1838

 Image 1839

 Image 1840

 Image 1841

 Image 1842

 Image 1843

 Image 1844

 Image 1845

 Image 1846

 Image 1847

 Image 1848


 Image 1849


 Image 1850

 Image 1851

 Image 1852

 Image 1853

 Image 1854

 Image 1855


 Image 1856

 Image 1857

 Image 1858

 Image 1859

 Image 1860

 Image 1861

 Image 1862

 Image 1863

 Image 1864

 Image 1865

 Image 1866

 Image 1867

 Image 1868


 Image 1869


 Image 1870

 Image 1871

 Image 1872

 Image 1873

 Image 1874

 Image 1875


 Image 1876

 Image 1877

 Image 1878

 Image 1879

 Image 1880

 Image 1881

 Image 1882

 Image 1883

 Image 1884

 Image 1885

 Image 1886

 Image 1887

 Image 1888


 Image 1889


 Image 1890

 Image 1891

 Image 1892

 Image 1893

 Image 1894

 Image 1895


 Image 1896

 Image 1897

 Image 1898

 Image 1899

 Image 1900

 Image 1901

 Image 1902

 Image 1903

 Image 1904

 Image 1905

 Image 1906

 Image 1907

 Image 1908


 Image 1909


 Image 1910

 Image 1911

 Image 1912

 Image 1913

 Image 1914

 Image 1915


 Image 1916

 Image 1917

 Image 1918

 Image 1919

 Image 1920

 Image 1921

 Image 1922

 Image 1923

 Image 1924

 Image 1925

 Image 1926

 Image 1927

 Image 1928


 Image 1929


 Image 1930

 Image 1931

 Image 1932

 Image 1933

 Image 1934

 Image 1935


 Image 1936

 Image 1937

 Image 1938

 Image 1939

 Image 1940

 Image 1941

 Image 1942

 Image 1943

 Image 1944

 Image 1945

 Image 1946

 Image 1947

 Image 1948


 Image 1949


 Image 1950

 Image 1951

 Image 1952

 Image 1953

 Image 1954

 Image 1955


 Image 1956

 Image 1957

 Image 1958

 Image 1959

 Image 1960

 Image 1961

 Image 1962

 Image 1963

 Image 1964

 Image 1965

 Image 1966

 Image 1967

 Image 1968


 Image 1969

 Image 1970

 Image 1971

 Image 1972

 Image 1973

 Image 1974


 Image 1975

 Image 1976

 Image 1977

 Image 1978

 Image 1979

 Image 1980

 Image 1981

 Image 1982

 Image 1983

 Image 1984

 Image 1985

 Image 1986

 Image 1987

 Image 1988


 Image 1989


 Image 1990

 Image 1991

 Image 1992

 Image 1993

 Image 1994

 Image 1995


 Image 1996

 Image 1997

 Image 1998

 Image 1999

 Image 2000

 Image 2001

 Image 2002

 Image 2003

 Image 2004

 Image 2005

 Image 2006

 Image 2007

 Image 2008


 Image 2009


 Image 2010

 Image 2011

 Image 2012

 Image 2013

 Image 2014

 Image 2015


 Image 2016

 Image 2017

 Image 2018

 Image 2019

 Image 2020

 Image 2021

 Image 2022

 Image 2023

 Image 2024

 Image 2025

 Image 2026

 Image 2027

 Image 2028


 Image 2029


 Image 2030

 Image 2031

 Image 2032

 Image 2033

 Image 2034

 Image 2035


 Image 2036

 Image 2037

 Image 2038

 Image 2039

 Image 2040

 Image 2041

 Image 2042

 Image 2043

 Image 2044

 Image 2045

 Image 2046

 Image 2047

 Image 2048


 Image 2049


 Image 2050

 Image 2051

 Image 2052

 Image 2053

 Image 2054

 Image 2055


 Image 2056

 Image 2057

 Image 2058

 Image 2059

 Image 2060

 Image 2061

 Image 2062

 Image 2063

 Image 2064

 Image 2065

 Image 2066

 Image 2067

 Image 2068


 Image 2069


 Image 2070

 Image 2071

 Image 2072

 Image 2073

 Image 2074

 Image 2075


 Image 2076

 Image 2077

 Image 2078

 Image 2079

 Image 2080

 Image 2081

 Image 2082

 Image 2083

 Image 2084

 Image 2085

 Image 2086

 Image 2087

 Image 2088

 Image 2089

 Image 2090

 Image 2091

 Image 2092

 Image 2093


 Image 2094

 Image 2095


 Image 2096

 Image 2097

 Image 2098

 Image 2099

 Image 2100

 Image 2101

 Image 2102

 Image 2103

 Image 2104

 Image 2105

 Image 2106

 Image 2107

 Image 2108

 Image 2109

 Image 2110

 Image 2111

 Image 2112

 Image 2113


 Image 2114

 Image 2115

 Image 2116

 Image 2117

 Image 2118

 Image 2119

 Image 2120

 Image 2121

 Image 2122

 Image 2123

 Image 2124

 Image 2125

 Image 2126

 Image 2127

 Image 2128

 Image 2129

 Image 2130

 Image 2131

 Image 2132

 Image 2133

 Image 2134

 Image 2135


 Image 2136

 Image 2137

 Image 2138

 Image 2139

 Image 2140

 Image 2141

 Image 2142

 Image 2143

 Image 2144

 Image 2145

 Image 2146

 Image 2147

 Image 2148


 Image 2149


 Image 2150

 Image 2151

 Image 2152

 Image 2153

 Image 2154

 Image 2155


 Image 2156

 Image 2157

 Image 2158

 Image 2159

 Image 2160

 Image 2161

 Image 2162

 Image 2163

 Image 2164

 Image 2165

 Image 2166

 Image 2167

 Image 2168


 Image 2169


 Image 2170

 Image 2171

 Image 2172

 Image 2173

 Image 2174

 Image 2175


 Image 2176

 Image 2177

 Image 2178

 Image 2179

 Image 2180

 Image 2181

 Image 2182

 Image 2183

 Image 2184

 Image 2185

 Image 2186

 Image 2187

 Image 2188

 Image 2189


 Image 2190

 Image 2191

 Image 2192

 Image 2193

 Image 2194

 Image 2195


 Image 2196

 Image 2197

 Image 2198

 Image 2199

 Image 2200

 Image 2201

 Image 2202

 Image 2203

 Image 2204

 Image 2205

 Image 2206

 Image 2207

 Image 2208


 Image 2209


 Image 2210

 Image 2211

 Image 2212

 Image 2213

 Image 2214

 Image 2215


 Image 2216

 Image 2217

 Image 2218

 Image 2219

 Image 2220

 Image 2221

 Image 2222

 Image 2223

 Image 2224

 Image 2225

 Image 2226

 Image 2227

 Image 2228


 Image 2229


 Image 2230

 Image 2231

 Image 2232

 Image 2233

 Image 2234

 Image 2235


 Image 2236

 Image 2237

 Image 2238

 Image 2239

 Image 2240

 Image 2241

 Image 2242

 Image 2243

 Image 2244

 Image 2245

 Image 2246

 Image 2247

 Image 2248

 Image 2249

 Image 2250

 Image 2251

 Image 2252

 Image 2253


 Image 2254

 Image 2255

 Image 2256

 Image 2257


 Image 2258

 Image 2259


 Image 2260

 Image 2261

 Image 2262

 Image 2263

 Image 2264

 Image 2265

 Image 2266

 Image 2267

 Image 2268


 Image 2269


 Image 2270

 Image 2271

 Image 2272

 Image 2273

 Image 2274

 Image 2275


 Image 2276

 Image 2277

 Image 2278

 Image 2279

 Image 2280

 Image 2281

 Image 2282

 Image 2283

 Image 2284

 Image 2285

 Image 2286

 Image 2287

 Image 2288


 Image 2289

 Image 2290

 Image 2291

 Image 2292

 Image 2293

 Image 2294


 Image 2295

 Image 2296

 Image 2297

 Image 2298

 Image 2299

 Image 2300

 Image 2301

 Image 2302

 Image 2303

 Image 2304

 Image 2305

 Image 2306

 Image 2307

 Image 2308

 Image 2309


 Image 2310

 Image 2311

 Image 2312

 Image 2313

 Image 2314

 Image 2315


 Image 2316

 Image 2317

 Image 2318

 Image 2319

 Image 2320

 Image 2321

 Image 2322

 Image 2323

 Image 2324

 Image 2325

 Image 2326

 Image 2327

 Image 2328


 Image 2329


 Image 2330

 Image 2331

 Image 2332

 Image 2333

 Image 2334

 Image 2335


 Image 2336

 Image 2337

 Image 2338

 Image 2339

 Image 2340

 Image 2341

 Image 2342

 Image 2343

 Image 2344

 Image 2345

 Image 2346

 Image 2347

 Image 2348


 Image 2349


 Image 2350

 Image 2351

 Image 2352

 Image 2353

 Image 2354

 Image 2355


 Image 2356

 Image 2357

 Image 2358

 Image 2359

 Image 2360

 Image 2361

 Image 2362

 Image 2363

 Image 2364

 Image 2365

 Image 2366

 Image 2367

 Image 2368


 Image 2369


 Image 2370

 Image 2371

 Image 2372

 Image 2373

 Image 2374

 Image 2375


 Image 2376

 Image 2377

 Image 2378

 Image 2379

 Image 2380

 Image 2381

 Image 2382

 Image 2383

 Image 2384

 Image 2385

 Image 2386

 Image 2387

 Image 2388

 Image 2389

 Image 2390

 Image 2391

 Image 2392

 Image 2393


 Image 2394

 Image 2395

 Image 2396

 Image 2397


 Image 2398

 Image 2399

 Image 2400

 Image 2401

 Image 2402

 Image 2403

 Image 2404

 Image 2405

 Image 2406

 Image 2407

 Image 2408

 Image 2409


 Image 2410

 Image 2411

 Image 2412

 Image 2413

 Image 2414

 Image 2415


 Image 2416

 Image 2417

 Image 2418

 Image 2419

 Image 2420

 Image 2421

 Image 2422

 Image 2423

 Image 2424

 Image 2425

 Image 2426

 Image 2427

 Image 2428

 Image 2429

 Image 2430

 Image 2431

 Image 2432

 Image 2433


 Image 2434

 Image 2435


 Image 2436

 Image 2437

 Image 2438

 Image 2439

 Image 2440

 Image 2441

 Image 2442

 Image 2443

 Image 2444

 Image 2445

 Image 2446

 Image 2447

 Image 2448

 Image 2449

 Image 2450

 Image 2451

 Image 2452

 Image 2453


 Image 2454

 Image 2455

 Image 2456

 Image 2457


 Image 2458

 Image 2459

 Image 2460

 Image 2461

 Image 2462

 Image 2463

 Image 2464

 Image 2465

 Image 2466

 Image 2467

 Image 2468


 Image 2469


 Image 2470

 Image 2471

 Image 2472

 Image 2473

 Image 2474

 Image 2475


 Image 2476

 Image 2477

 Image 2478

 Image 2479

 Image 2480

 Image 2481

 Image 2482

 Image 2483

 Image 2484

 Image 2485

 Image 2486

 Image 2487

 Image 2488

 Image 2489

 Image 2490

 Image 2491

 Image 2492

 Image 2493

 Image 2494

 Image 2495


 Image 2496

 Image 2497

 Image 2498

 Image 2499

 Image 2500

 Image 2501

 Image 2502

 Image 2503

 Image 2504

 Image 2505

 Image 2506

 Image 2507

 Image 2508

 Image 2509

 Image 2510

 Image 2511

 Image 2512

 Image 2513

 Image 2514

 Image 2515


 Image 2516

 Image 2517

 Image 2518

 Image 2519

 Image 2520

 Image 2521

 Image 2522

 Image 2523

 Image 2524

 Image 2525

 Image 2528

 Image 2529

 Image 2530

 Image 2531

 Image 2532

 Image 2533

 Image 2534

 Image 2535

 Image 2536

 Image 2537

 Image 2538


 Image 2539

 Image 2540

 Image 2541

 Image 2542

 Image 2543

 Image 2544

 Image 2545

 Image 2546

 Image 2547

 Image 2548

 Image 2549

 Image 2550

 Image 2551

 Image 2552

 Image 2553

 Image 2554

 Image 2555

 Image 2556

 Image 2557

 Image 2558


 Image 2559

 Image 2560

 Image 2561

 Image 2562

 Image 2563

 Image 2564

 Image 2565

 Image 2566

 Image 2567

 Image 2568

 Image 2569


 Image 2570


 Image 2571

 Image 2572

 Image 2573

 Image 2574

 Image 2575

 Image 2576


 Image 2577

 Image 2578

 Image 2579

 Image 2580

 Image 2581

 Image 2582

 Image 2583

 Image 2584

 Image 2585

 Image 2586

 Image 2587

 Image 2588

 Image 2589


 Image 2590


 Image 2591

 Image 2592

 Image 2593

 Image 2594

 Image 2595

 Image 2596


 Image 2597

 Image 2598

 Image 2599

 Image 2600

 Image 2601

 Image 2602

 Image 2603

 Image 2604

 Image 2605

 Image 2606

 Image 2607

 Image 2608

 Image 2609


 Image 2610


 Image 2611

 Image 2612

 Image 2613

 Image 2614

 Image 2615

 Image 2616


 Image 2617

 Image 2618

 Image 2619

 Image 2620

 Image 2621

 Image 2622

 Image 2623

 Image 2624

 Image 2625

 Image 2626

 Image 2627

 Image 2628

 Image 2629

 Image 2630

 Image 2631

 Image 2632

 Image 2633

 Image 2634


 Image 2635

 Image 2636

 Image 2637

 Image 2638


 Image 2639

 Image 2640

 Image 2641

 Image 2642

 Image 2643

 Image 2644

 Image 2645

 Image 2646

 Image 2647

 Image 2648

 Image 2649


 Image 2650


 Image 2651

 Image 2652

 Image 2653

 Image 2654

 Image 2655

 Image 2656


 Image 2657

 Image 2658

 Image 2659

 Image 2660

 Image 2661

 Image 2662

 Image 2663

 Image 2664

 Image 2665

 Image 2666

 Image 2667

 Image 2668

 Image 2669


 Image 2670


 Image 2671

 Image 2672

 Image 2673

 Image 2674

 Image 2675

 Image 2676


 Image 2677

 Image 2678

 Image 2679

 Image 2680

 Image 2681

 Image 2682

 Image 2683

 Image 2684

 Image 2685

 Image 2686

 Image 2687

 Image 2688

 Image 2689


 Image 2690


 Image 2691

 Image 2692

 Image 2693

 Image 2694

 Image 2695

 Image 2696


 Image 2697

 Image 2698

 Image 2699

 Image 2700

 Image 2701

 Image 2702

 Image 2703

 Image 2704

 Image 2705

 Image 2706

 Image 2707

 Image 2708

 Image 2709

 Image 2710

 Image 2711

 Image 2712

 Image 2713

 Image 2714


 Image 2715

 Image 2716


 Image 2717

 Image 2718

 Image 2719

 Image 2720

 Image 2721

 Image 2722

 Image 2723

 Image 2724

 Image 2725

 Image 2726

 Image 2727

 Image 2728

 Image 2729


 Image 2730

 Image 2731

 Image 2732

 Image 2733

 Image 2734

 Image 2735


 Image 2736

 Image 2737

 Image 2738

 Image 2739

 Image 2740

 Image 2741

 Image 2742

 Image 2743

 Image 2744

 Image 2745

 Image 2746

 Image 2747

 Image 2748

 Image 2749

 Image 2750

 Image 2751

 Image 2752

 Image 2753

 Image 2754


 Image 2755

 Image 2756


 Image 2757

 Image 2758


 Image 2759

 Image 2760

 Image 2761

 Image 2762

 Image 2763

 Image 2764

 Image 2765

 Image 2766

 Image 2767

 Image 2768

 Image 2769


 Image 2770


 Image 2771

 Image 2772

 Image 2773

 Image 2774

 Image 2775

 Image 2776


 Image 2777

 Image 2778

 Image 2779

 Image 2780

 Image 2781

 Image 2782

 Image 2783

 Image 2784

 Image 2785

 Image 2786

 Image 2787

 Image 2788

 Image 2789


 Image 2790


 Image 2791

 Image 2792

 Image 2793

 Image 2794

 Image 2795

 Image 2796


 Image 2797

 Image 2798

 Image 2799

 Image 2800

 Image 2801

 Image 2802

 Image 2803

 Image 2804

 Image 2805

 Image 2806

 Image 2807

 Image 2808

 Image 2809


 Image 2810


 Image 2811

 Image 2812

 Image 2813

 Image 2814

 Image 2815

 Image 2816


 Image 2817

 Image 2818

 Image 2819

 Image 2820

 Image 2821

 Image 2822

 Image 2823

 Image 2824

 Image 2825

 Image 2826

 Image 2827

 Image 2828

 Image 2829

 Image 2830


 Image 2831

 Image 2832

 Image 2833

 Image 2834

 Image 2835

 Image 2836


 Image 2837

 Image 2838

 Image 2839

 Image 2840

 Image 2841

 Image 2842

 Image 2843

 Image 2844

 Image 2845

 Image 2846

 Image 2847

 Image 2848

 Image 2849


 Image 2850


 Image 2851

 Image 2852

 Image 2853

 Image 2854

 Image 2855

 Image 2856


 Image 2857

 Image 2858

 Image 2859

 Image 2860

 Image 2861

 Image 2862

 Image 2863

 Image 2864

 Image 2865

 Image 2866

 Image 2867

 Image 2868

 Image 2869


 Image 2870


 Image 2871

 Image 2872

 Image 2873

 Image 2874

 Image 2875

 Image 2876


 Image 2877

 Image 2878

 Image 2879

 Image 2880

 Image 2881

 Image 2882

 Image 2883

 Image 2884

 Image 2885

 Image 2886

 Image 2887

 Image 2888

 Image 2889

 Image 2890

 Image 2891

 Image 2892

 Image 2893

 Image 2894

 Image 2895






 Image 2896


 Image 2897

 Image 2898

 Image 2899

 Image 2900

 Image 2901

 Image 3019


 Image 3020

 Image 3021

 Image 3022

 Image 3023

 Image 3024

 Image 3025

 Image 3026

 Image 3027

 Image 3028

 Image 3029

 Image 3030

 Image 3031


 Image 3032


 Image 3033

 Image 3034

 Image 3035

 Image 3036

 Image 3037

 Image 3038


 Image 3039

 Image 3040

 Image 3041

 Image 3042

 Image 3043

 Image 3044

 Image 3045

 Image 3046

 Image 3047

 Image 3048

 Image 3049

 Image 3050

 Image 3051


 Image 3052


 Image 3053

 Image 3054

 Image 3055

 Image 3056

 Image 3057

 Image 3058


 Image 3059

 Image 3060

 Image 3061

 Image 3062

 Image 3063

 Image 3064

 Image 3065

 Image 3066

 Image 3067

 Image 3068

 Image 3069

 Image 3070

 Image 3071


 Image 3072


 Image 3073

 Image 3074

 Image 3075

 Image 3076

 Image 3077

 Image 3078


 Image 3079

 Image 3080

 Image 3081

 Image 3082

 Image 3083

 Image 3084

 Image 3085

 Image 3086

 Image 3087

 Image 3088

 Image 3089

 Image 3090

 Image 3091

 Image 3092

 Image 3093

 Image 3094

 Image 3095

 Image 3096

 Image 3097

 Image 3098

 Image 3099

 Image 3100

 Image 3101

 Image 3102

 Image 3103

 Image 3104

 Image 3105

 Image 3106

 Image 3107

 Image 3108

 Image 3109

 Image 3110

 Image 3111

 Image 3112

 Image 3113

 Image 3114

 Image 3115

 Image 3116

 Image 3117

 Image 3118

 Image 3119

 Image 3120

 Image 3121

 Image 3122

 Image 3123

 Image 3124

 Image 3125

 Image 3126

 Image 3127

 Image 3128

 Image 3129

 Image 3130

 Image 3131


 Image 3132


 Image 3133

 Image 3134

 Image 3135

 Image 3136

 Image 3137

 Image 3138


 Image 3139

 Image 3140

 Image 3141

 Image 3142

 Image 3143

 Image 3144

 Image 3145

 Image 3146

 Image 3147

 Image 3148

 Image 3149

 Image 3150

 Image 3151


 Image 3152


 Image 3153

 Image 3154

 Image 3155

 Image 3156

 Image 3157

 Image 3158


 Image 3159

 Image 3160

 Image 3161

 Image 3162

 Image 3163

 Image 3164

 Image 3165

 Image 3166

 Image 3167

 Image 3168

 Image 3169

 Image 3170

 Image 3171


 Image 3172


 Image 3173

 Image 3174

 Image 3175

 Image 3176

 Image 3177

 Image 3178


 Image 3179

 Image 3180

 Image 3181

 Image 3182

 Image 3183

 Image 3184

 Image 3185

 Image 3186

 Image 3187

 Image 3188

 Image 3189

 Image 3190

 Image 3191


 Image 3192

 Image 3193

 Image 3194

 Image 3195

 Image 3196

 Image 3197


 Image 3198

 Image 3199

 Image 3200

 Image 3201

 Image 3202

 Image 3203

 Image 3204

 Image 3205

 Image 3206

 Image 3207

 Image 3208

 Image 3209

 Image 3210

 Image 3211

 Image 3212

 Image 3213

 Image 3214

 Image 3215

 Image 3216


 Image 3217

 Image 3218

 Image 3219

 Image 3220

 Image 3221

 Image 3222

 Image 3223

 Image 3224

 Image 3225

 Image 3226

 Image 3227

 Image 3228

 Image 3229

 Image 3230

 Image 3231


 Image 3232


 Image 3233

 Image 3234

 Image 3235

 Image 3236

 Image 3237

 Image 3238


 Image 3239

 Image 3240

 Image 3241

 Image 3242

 Image 3243

 Image 3244

 Image 3245

 Image 3246

 Image 3247

 Image 3248

 Image 3249

 Image 3250

 Image 3251

 Image 3252

 Image 3253

 Image 3254

 Image 3255

 Image 3256


 Image 3257

 Image 3258

 Image 3259

 Image 3260

 Image 3261

 Image 3262

 Image 3263

 Image 3264

 Image 3265

 Image 3266

 Image 3267

 Image 3268

 Image 3269

 Image 3270

 Image 3271

 Image 3272

 Image 3273

 Image 3274

 Image 3275

 Image 3276

 Image 3277

 Image 3278

 Image 3279

 Image 3280

 Image 3281

 Image 3282

 Image 3283

 Image 3284

 Image 3285

 Image 3286

 Image 3287

 Image 3288

 Image 3289

 Image 3290

 Image 3291


 Image 3292


 Image 3293

 Image 3294

 Image 3295

 Image 3296

 Image 3297

 Image 3298


 Image 3299

 Image 3300

 Image 3301

 Image 3302

 Image 3303

 Image 3304

 Image 3305

 Image 3306

 Image 3307

 Image 3308

 Image 3309

 Image 3310

 Image 3311

 Image 3312

 Image 3313

 Image 3314

 Image 3315

 Image 3316


 Image 3317

 Image 3318


 Image 3319

 Image 3320

 Image 3321

 Image 3322

 Image 3323

 Image 3324

 Image 3325

 Image 3326

 Image 3327

 Image 3328

 Image 3329

 Image 3330

 Image 3331

 Image 3332

 Image 3333

 Image 3334

 Image 3335

 Image 3336


 Image 3337

 Image 3338

 Image 3339

 Image 3340

 Image 3341

 Image 3342

 Image 3343

 Image 3344

 Image 3345

 Image 3346

 Image 3347

 Image 3348

 Image 3349

 Image 3350

 Image 3351


 Image 3352


 Image 3353

 Image 3354

 Image 3355

 Image 3356

 Image 3357

 Image 3358


 Image 3359

 Image 3360

 Image 3361

 Image 3362

 Image 3363

 Image 3364

 Image 3365

 Image 3366

 Image 3367

 Image 3368

 Image 3369

 Image 3370

 Image 3371


 Image 3372


 Image 3373

 Image 3374

 Image 3375

 Image 3376

 Image 3377

 Image 3378


 Image 3379

 Image 3380

 Image 3381

 Image 3382

 Image 3383

 Image 3384

 Image 3385

 Image 3386

 Image 3387

 Image 3388

 Image 3389

 Image 3390

 Image 3391

 Image 3392

 Image 3393

 Image 3394

 Image 3395

 Image 3396


 Image 3397

 Image 3398

 Image 3399

 Image 3400

 Image 3401

 Image 3402

 Image 3403

 Image 3404

 Image 3405

 Image 3406

 Image 3407

 Image 3408

 Image 3409

 Image 3410

 Image 3411

 Image 3412

 Image 3413

 Image 3414

 Image 3415

 Image 3416


 Image 3417

 Image 3418


 Image 3419

 Image 3420

 Image 3421

 Image 3422

 Image 3423

 Image 3424

 Image 3425

 Image 3426

 Image 3427

 Image 3428

 Image 3429

 Image 3430

 Image 3431


 Image 3432


 Image 3433

 Image 3434

 Image 3435

 Image 3436

 Image 3437

 Image 3438


 Image 3439

 Image 3440

 Image 3441

 Image 3442

 Image 3443

 Image 3444

 Image 3445

 Image 3446

 Image 3447

 Image 3448

 Image 3449

 Image 3450

 Image 3451


 Image 3452


 Image 3453

 Image 3454

 Image 3455

 Image 3456

 Image 3457

 Image 3458


 Image 3459

 Image 3460

 Image 3461

 Image 3462

 Image 3463

 Image 3464

 Image 3465

 Image 3466

 Image 3467

 Image 3468

 Image 3469

 Image 3470

 Image 3471

 Image 3472

 Image 3473

 Image 3474

 Image 3475

 Image 3476

 Image 3477

 Image 3478

 Image 3479

 Image 3480

 Image 3481

 Image 3482

 Image 3483

 Image 3484

 Image 3485

 Image 3486

 Image 3487

 Image 3488

 Image 3489

 Image 3490

 Image 3491


 Image 3492


 Image 3493

 Image 3494

 Image 3495

 Image 3496

 Image 3497

 Image 3498


 Image 3499

 Image 3500

 Image 3501

 Image 3502

 Image 3503

 Image 3504

 Image 3505

 Image 3506

 Image 3507

 Image 3508

 Image 3509

 Image 3510

 Image 3511


 Image 3512


 Image 3513

 Image 3514

 Image 3515

 Image 3516

 Image 3517

 Image 3518


 Image 3519

 Image 3520

 Image 3521

 Image 3522

 Image 3523

 Image 3524

 Image 3525

 Image 3526

 Image 3527

 Image 3528

 Image 3529

 Image 3530

 Image 3531


 Image 3532


 Image 3533

 Image 3534

 Image 3535

 Image 3536

 Image 3537

 Image 3538


 Image 3539

 Image 3540

 Image 3541

 Image 3542

 Image 3543

 Image 3544

 Image 3545

 Image 3546

 Image 3547

 Image 3548

 Image 3549

 Image 3550

 Image 3551


 Image 3552


 Image 3553

 Image 3554

 Image 3555

 Image 3556

 Image 3557

 Image 3558


 Image 3559

 Image 3560

 Image 3561

 Image 3562

 Image 3563

 Image 3564

 Image 3565

 Image 3566

 Image 3567

 Image 3568

 Image 3569

 Image 3570

 Image 3571

 Image 3572

 Image 3573

 Image 3574

 Image 3575

 Image 3576

 Image 3577

 Image 3578

 Image 3579

 Image 3580

 Image 3581

 Image 3582

 Image 3583

 Image 3584

 Image 3585

 Image 3586

 Image 3587

 Image 3588

 Image 3589

 Image 3590

 Image 3591


 Image 3592


 Image 3593

 Image 3594

 Image 3595

 Image 3596

 Image 3597

 Image 3598


 Image 3599

 Image 3600

 Image 3601

 Image 3602

 Image 3603

 Image 3604

 Image 3605

 Image 3606

 Image 3607

 Image 3608

 Image 3609

 Image 3610

 Image 3611

 Image 3612

 Image 3613

 Image 3614

 Image 3615

 Image 3616


 Image 3617

 Image 3618


 Image 3619

 Image 3620

 Image 3621

 Image 3622

 Image 3623

 Image 3624

 Image 3625

 Image 3626

 Image 3627

 Image 3628

 Image 3629

 Image 3630

 Image 3631

 Image 3632

 Image 3633

 Image 3634

 Image 3635

 Image 3636

 Image 3637



 Image 3638

 Image 3639

 Image 3640

 Image 3641


 Image 3642

 Image 3643


 Image 3644

 Image 3645

 Image 3646

 Image 3647

 Image 3648

 Image 3649

 Image 3650

 Image 3651

 Image 3652

 Image 3653

 Image 3654

 Image 3655

 Image 3656

 Image 3657

 Image 3658

 Image 3659

 Image 3660

 Image 3661

 Image 3662

Image 3663

Image 3664

Image 3665

Image 3666

Image 3667

Image 3668

Image 3669


Image 3670

Image 3671

Image 3672

Image 3673

Image 3674

Image 3675

Image 3676


Image 3677

Image 3678


Image 3679

Image 3680

Image 3681

Image 3682

Image 3683

Image 3684

Image 3685

Image 3686

Image 3687

Image 3688

Image 3689

Image 3690

Image 3691

Image 3692

Image 3693

Image 3694

Image 3695

Image 3696

Image 3697

Image 3698

Image 3699

Image 3700

Image 3701

Image 3702

Image 3703


Image 3704

Image 3705

Image 3706


Image 3707

Image 3708

Image 3709

Image 3710

Image 3711

Image 3712

Image 3713

Image 3714

Image 3715

Image 3716

Image 3717

Image 3718

Image 3719

Image 3720

Image 3721

Image 3722

 Image 3723

 Image 3724


 Image 3725

 Image 3726

 Image 3727

 Image 3728

 Image 3729

 Image 3730

 Image 3731

 Image 3732

 Image 3733

 Image 3734

 Image 3735

 Image 3736

 Image 3737

 Image 3738

 Image 3739

 Image 3740

 Image 3741

 Image 3742

Image 3743


Image 3744

Image 3745

Image 3746

Image 3747

Image 3748

Image 3749

Image 3750

Image 3751

Image 3752

Image 3753

Image 3754

Image 3755

Image 3756


Image 3757

Image 3758


Image 3759

Image 3760

Image 3761

Image 3762

 Image 3763

 Image 3764

 Image 3765


 Image 3766

 Image 3767

 Image 3768

 Image 3769

 Image 3770

 Image 3771

 Image 3772

 Image 3773

 Image 3774

 Image 3775

 Image 3776

 Image 3777

 Image 3778

 Image 3779

 Image 3780

 Image 3781

 Image 3782

Image 3783

Image 3784

Image 3785

Image 3786

Image 3787

Image 3788

Image 3789

Image 3790

Image 3791

Image 3792

Image 3793

Image 3794

Image 3795

Image 3796

Image 3797

Image 3798

Image 3799

Image 3800

Image 3801

Image 3802

Image 3803

Image 3804

Image 3805

Image 3806


Image 3807

Image 3808

Image 3809


Image 3810

Image 3811

Image 3812

Image 3813

Image 3814

Image 3815

Image 3816

Image 3817

Image 3818

Image 3819

Image 3820

Image 3821

Image 3822

Image 3823

Image 3824

Image 3825

Image 3826


Image 3827

Image 3828

Image 3829

Image 3830

Image 3831

Image 3832

Image 3833

Image 3834

Image 3835

Image 3836

Image 3837

Image 3838

Image 3839

Image 3840

Image 3841

Image 3842

Image 3843

Image 3844

Image 3845

Image 3846

Image 3847

Image 3848

Image 3849

Image 3850

Image 3851

Image 3852

Image 3853

Image 3854

Image 3855

Image 3856

Image 3857

Image 3858

Image 3859

Image 3860

Image 3861

Image 3862

Image 3863


Image 3864

Image 3865

Image 3866


Image 3867

Image 3868

Image 3869

Image 3870

Image 3871

Image 3872

Image 3873

Image 3874

Image 3875

Image 3876

Image 3877

Image 3878

Image 3879

Image 3880

Image 3881

Image 3882

Image 3883

Image 3884

Image 3885

Image 3886


Image 3887

Image 3888

Image 3889

Image 3890

Image 3891

Image 3892

Image 3893

Image 3894

Image 3895

Image 3896

Image 3897

Image 3898

Image 3899

Image 3900

Image 3901

Image 3902

Image 3903

Image 3904

Image 3905

Image 3906

Image 3907

Image 3908

Image 3909

Image 3910

Image 3911

Image 3912

Image 3913

Image 3914

Image 3915

Image 3916

Image 3917

Image 3918

Image 3919

Image 3920

Image 3921

Image 3922

Image 3923

Image 3924

Image 3925

Image 3926

Image 3927

Image 3928

Image 3929

Image 3930

Image 3931

Image 3932

Image 3933

Image 3934

Image 3935

Image 3936

Image 3937

Image 3938

Image 3939

Image 3940

Image 3941

Image 3942

Image 3943

Image 3944

Image 3945

Image 3946


Image 3947

Image 3948

Image 3949


Image 3950

Image 3951

Image 3952

Image 3953

Image 3954

Image 3955

Image 3956




Image 3957

Image 3958

Image 3959

Image 3960


Image 3961

Image 3962

Image 3963


Image 3964

Image 3965

Image 3966


Image 3967

Image 3968

Image 3969

Image 3970

Image 3971

Image 3972


Image 3973


Image 3974

Image 3975

Image 3976

Image 3977

Image 3978

Image 3979


Image 3980

Image 3981

Image 3982

 Image 3983

 Image 3984

 Image 3985

 Image 3986

 Image 3987

 Image 3988

 Image 3989

 Image 3990

 Image 3991

 Image 3992

 Image 3993

 Image 3994

 Image 3995

 Image 3996

 Image 3997

 Image 3998

 Image 3999

 Image 4000

 Image 4001

 Image 4002

Image 4003

Image 4004

Image 4005

Image 4006


Image 4007

Image 4008

Image 4009


Image 4010

Image 4011

Image 4012

Image 4013

Image 4014

Image 4015

Image 4016

Image 4017

Image 4018

Image 4019

Image 4020

Image 4021


Image 4022

Image 4023

Image 4024

Image 4025

Image 4026

Image 4027


Image 4028

Image 4029


Image 4030

Image 4031

Image 4032

Image 4033

Image 4034

Image 4035

Image 4036

Image 4037

Image 4038

Image 4039

Image 4040

Image 4041

Image 4042

Image 4043


Image 4044

Image 4045

Image 4046

Image 4047

Image 4048

Image 4049


Image 4050

Image 4051

Image 4052

Image 4053

Image 4054

Image 4055

Image 4056

Image 4057

Image 4058

Image 4059

Image 4060

Image 4061

Image 4062

Image 4063


Image 4064

Image 4065

Image 4066


Image 4067

Image 4068

Image 4069

Image 4070

Image 4071

Image 4072

Image 4073

Image 4074

Image 4075

Image 4076



Image 4077

Image 4078

Image 4079

Image 4080


Image 4081

Image 4082

Image 4083

Image 4084

Image 4085

Image 4086

Image 4087

Image 4088

Image 4089

Image 4090

Image 4091

Image 4092

Image 4093

Image 4094

Image 4095

Image 4096

Image 4097

Image 4098

Image 4099

Image 4100

Image 4101

Image 4102

Image 4103


Image 4104

Image 4105

Image 4106


Image 4107

Image 4108

Image 4109


Image 4110

Image 4111

Image 4112

Image 4113

Image 4114

Image 4115

Image 4116

Image 4117

Image 4118

Image 4119

Image 4120

Image 4121

Image 4122

Image 4123

Image 4124

Image 4125

Image 4126


Image 4127

Image 4128

Image 4129


Image 4130

Image 4131

Image 4132

Image 4133

Image 4134

Image 4135

Image 4136

Image 4137

Image 4138

Image 4139

Image 4140

Image 4141

Image 4142


Image 4143

Image 4144

Image 4145

Image 4146

Image 4147

Image 4148

Image 4149

Image 4150

Image 4151

Image 4152

Image 4153

Image 4154

Image 4155

Image 4156

Image 4157

Image 4158

Image 4159

Image 4160

Image 4161

Image 4162

Image 4163

Image 4164

Image 4165

Image 4166

Image 4167

Image 4168

Image 4169

Image 4170

Image 4171

Image 4172

Image 4173

Image 4174

Image 4175

Image 4176

Image 4177

Image 4178


Image 4179

Image 4180

Image 4181


Image 4182

Image 4183

Image 4184


Image 4185

Image 4186

Image 4187

Image 4188

Image 4189

Image 4190

Image 4191

Image 4192

Image 4193

Image 4194

Image 4195

Image 4196

Image 4197

Image 4198

Image 4199

Image 4200

Image 4201

Image 4202

 Image 4203

 Image 4204

 Image 4205

 Image 4206

 Image 4207

 Image 4208

 Image 4209

 Image 4210

 Image 4211

 Image 4212

 Image 4213

 Image 4214

 Image 4215

 Image 4216

 Image 4217

 Image 4218

 Image 4219

 Image 4220

 Image 4221

 Image 4222

Image 4223

Image 4224

Image 4225

Image 4226

Image 4227

Image 4228

Image 4229

Image 4230

Image 4231

Image 4232

Image 4233

Image 4234

Image 4235

Image 4236

Image 4237

Image 4238

Image 4239

Image 4240

Image 4241

Image 4242

Image 4243


Image 4244

Image 4245

Image 4246

Image 4247

Image 4248

Image 4249

Image 4250

Image 4251

Image 4252

Image 4253

Image 4254

Image 4255

Image 4256

Image 4257

Image 4258

Image 4259

Image 4260

Image 4261

Image 4262

Image 4263

Image 4264

Image 4265

Image 4266

Image 4267

Image 4268

Image 4269

Image 4270

Image 4271

Image 4272

Image 4273

Image 4274

Image 4275

Image 4276

Image 4277

Image 4278

Image 4279

Image 4280

Image 4281

Image 4282

 Image 4283

 Image 4284

 Image 4285

 Image 4286

 Image 4287

 Image 4288

 Image 4289

 Image 4290

 Image 4291

 Image 4292

 Image 4293

 Image 4294

 Image 4295

 Image 4296

 Image 4297

 Image 4298

 Image 4299

 Image 4300

 Image 4301

 Image 4302

Image 4303

Image 4304

Image 4305

Image 4306


Image 4307

Image 4308

Image 4309


Image 4310

Image 4311

Image 4312

Image 4313

Image 4314

Image 4315

Image 4316



Image 4317

Image 4318

Image 4319


Image 4320

Image 4321


Image 4322

Image 4323


Image 4324

Image 4325

Image 4326


Image 4327

Image 4328

Image 4329

Image 4330

Image 4331

Image 4332

Image 4333

Image 4334

Image 4335

Image 4336

Image 4337

Image 4338

Image 4339

Image 4340

Image 4341

Image 4342

Image 4343

Image 4344

Image 4345

Image 4346


Image 4347

Image 4348

Image 4349

Image 4350


Image 4351

Image 4352

Image 4353

Image 4354

Image 4355

Image 4356




Image 4357

Image 4358

Image 4359

Image 4360


Image 4361


Image 4362

Image 4363

Image 4364

Image 4365

Image 4366

Image 4367


Image 4368

Image 4369

Image 4370

Image 4371

Image 4372

Image 4373

Image 4374

Image 4375

Image 4376

Image 4377

Image 4378

Image 4379

Image 4380

Image 4381

Image 4382

Image 4383

Image 4384


Image 4385

Image 4386

Image 4387

Image 4388

Image 4389

Image 4390

Image 4391

Image 4392

Image 4393

Image 4394

Image 4395

Image 4396

Image 4397

Image 4398

Image 4399

Image 4400

Image 4401

Image 4402

 Image 4403

 Image 4404

 Image 4405

 Image 4406

 Image 4407

 Image 4408

 Image 4409

 Image 4410

 Image 4411

 Image 4412

 Image 4413

 Image 4414

 Image 4415

 Image 4416

 Image 4417

 Image 4418

 Image 4419

 Image 4420

 Image 4421

 Image 4422

Image 4423

Image 4424

Image 4425

Image 4426


Image 4427

Image 4428

Image 4429

Image 4430

Image 4431

Image 4432

Image 4433

Image 4434

Image 4435

Image 4436

Image 4437

Image 4438

Image 4439

Image 4440

Image 4441

Image 4442

 Image 4443

 Image 4444


 Image 4445

 Image 4446

 Image 4447

 Image 4448

 Image 4449

 Image 4450

 Image 4451

 Image 4452

 Image 4453

 Image 4454

 Image 4455

 Image 4456

 Image 4457

 Image 4458

 Image 4459


 Image 4460

 Image 4461

 Image 4462

 Image 4463

 Image 4464

 Image 4465


 Image 4466

 Image 4467

 Image 4468

 Image 4469

 Image 4470

 Image 4471

 Image 4472

 Image 4473

 Image 4474

 Image 4475

 Image 4476

 Image 4477

 Image 4478

 Image 4479


 Image 4480

 Image 4481

 Image 4482

 Image 4483

 Image 4484

 Image 4485


 Image 4486

 Image 4487

 Image 4488

 Image 4489

 Image 4490

 Image 4491

 Image 4492

 Image 4493

 Image 4494

 Image 4495

 Image 4496

 Image 4497

 Image 4498

 Image 4499

 Image 4500

 Image 4501

 Image 4502

 Image 4503

 Image 4504

 Image 4505

 Image 4506

 Image 4507

 Image 4508

 Image 4509


 Image 4510

 Image 4511

 Image 4512

 Image 4513

 Image 4514

 Image 4515

 Image 4516

 Image 4517

 Image 4518

 Image 4519

 Image 4520

 Image 4521

 Image 4522

 Image 4523

 Image 4524


 Image 4525

 Image 4526

 Image 4527

 Image 4528

 Image 4529

 Image 4530

 Image 4531

 Image 4532

 Image 4533

 Image 4534

 Image 4535

 Image 4536

 Image 4537

 Image 4538

 Image 4539

 Image 4540

 Image 4541

 Image 4542

Image 4543


Image 4544

Image 4545

Image 4546


Image 4547

Image 4548

Image 4549

Image 4550

Image 4551

Image 4552

Image 4553


Image 4554


Image 4555

Image 4556

Image 4557

Image 4558

Image 4559

Image 4560


Image 4561

Image 4562



 Image 4563

 Image 4564

 Image 4565


 Image 4566

 Image 4567

 Image 4568

 Image 4569

 Image 4570

 Image 4571

 Image 4572

 Image 4573

 Image 4574

 Image 4575

 Image 4576

 Image 4577

 Image 4578

 Image 4579

 Image 4580

 Image 4581

 Image 4582

Image 4583

Image 4584

Image 4585

Image 4586


Image 4587

Image 4588

Image 4589

Image 4590

Image 4591

Image 4592

Image 4593

Image 4594

Image 4595

Image 4596

Image 4597

Image 4598

Image 4599


Image 4600

Image 4601

Image 4602

Image 4603

Image 4604

Image 4605


Image 4606

Image 4607

Image 4608

Image 4609

Image 4610

Image 4611

Image 4612

Image 4613

Image 4614

Image 4615

Image 4616

Image 4617

Image 4618

Image 4619

Image 4620

Image 4621

Image 4622

Image 4623

Image 4624

Image 4625

Image 4626

Image 4627

Image 4628

Image 4629

Image 4630

Image 4631

Image 4632

Image 4633

Image 4634

Image 4635

Image 4636

Image 4637

Image 4638

Image 4639

Image 4640

Image 4641

Image 4642

Image 4643

Image 4644

Image 4645

Image 4646

Image 4647

Image 4648

Image 4649

Image 4650

Image 4651

Image 4652

Image 4653

Image 4654

Image 4655

Image 4656

Image 4657

Image 4658

Image 4659

Image 4660

Image 4661

Image 4662

Image 4663

Image 4664

Image 4665

Image 4666


Image 4667

Image 4668

Image 4669

Image 4670

Image 4671

Image 4672

Image 4673

Image 4674

Image 4675

Image 4676

Image 4677

Image 4678

Image 4679

Image 4680

Image 4681

Image 4682

Image 4683

Image 4684

Image 4685

Image 4686


Image 4687

Image 4688

Image 4689

Image 4690

Image 4691

Image 4692


Image 4693

Image 4694

Image 4695

Image 4696

Image 4697

Image 4698

Image 4699

Image 4700

Image 4701

Image 4702

Image 4703

Image 4704

Image 4705

Image 4706

Image 4707


Image 4708

Image 4709

Image 4710


Image 4711

Image 4712

Image 4713

Image 4714

Image 4715

Image 4716

Image 4717

Image 4718

Image 4719

Image 4720

Image 4721

Image 4722

Image 4723

Image 4724

Image 4725

Image 4726


Image 4727

Image 4728

Image 4729

Image 4730

Image 4731

Image 4732

Image 4733

Image 4734

Image 4735

Image 4736


Image 4737

Image 4738


Image 4739

Image 4740

Image 4741


Image 4742

Image 4743


Image 4744

Image 4745

Image 4746


Image 4747

Image 4748

Image 4749

Image 4750

Image 4751

Image 4752


Image 4753

Image 4754

Image 4755

Image 4756

Image 4757

Image 4758

Image 4759

Image 4760

Image 4761

Image 4762

Image 4763

Image 4764

Image 4765

Image 4766


Image 4767

Image 4768

Image 4769

Image 4770

Image 4771

Image 4772

Image 4773

Image 4774

Image 4775

Image 4776

Image 4777

Image 4778

Image 4779

Image 4780

Image 4781

Image 4782

Image 4783

Image 4784

Image 4785

Image 4786

Image 4787

Image 4788

Image 4789


Image 4790

Image 4791

Image 4792

Image 4793

Image 4794

Image 4795

Image 4796

Image 4797

Image 4798

Image 4799

Image 4800

Image 4801

Image 4802

Image 4803

Image 4804

Image 4805

Image 4806

Image 4807


Image 4808

Image 4809

Image 4810

Image 4811

Image 4812

Image 4813

Image 4814

Image 4815

Image 4816

Image 4817

Image 4818

Image 4819

Image 4820

Image 4821

Image 4822

Image 4823

Image 4824

Image 4825

Image 4826

Image 4827

Image 4828

Image 4829

Image 4830

Image 4831

Image 4832

Image 4833

Image 4834

Image 4835

Image 4836

Image 4837

Image 4838

Image 4839

Image 4840

Image 4841

Image 4842

Image 4843


Image 4844

Image 4845

Image 4846

Image 4847

Image 4848

Image 4849

Image 4850

Image 4851

Image 4852

Image 4853


Image 4854


Image 4855

Image 4856

Image 4857

Image 4858

Image 4859

Image 4860


Image 4861

Image 4862

Image 4863

Image 4864

Image 4865


Image 4866

Image 4867

Image 4868

Image 4869

Image 4870

Image 4871

Image 4872

Image 4873

Image 4874

Image 4875

Image 4876

Image 4877

Image 4878

Image 4879

Image 4880

Image 4881

Image 4882

Image 4883

Image 4884

Image 4885

Image 4886

Image 4887

Image 4888

Image 4889

Image 4890

Image 4891

Image 4892

Image 4893

Image 4894

Image 4895

Image 4896

Image 4897

Image 4898

Image 4899

Image 4900

Image 4901

Image 4902

Image 4903

Image 4904

Image 4905

Image 4906


Image 4907

Image 4908

Image 4909


Image 4910

Image 4911

Image 4912

Image 4913

Image 4914

Image 4915

Image 4916

Image 4917

Image 4918

Image 4919

Image 4920

Image 4921

Image 4922

Image 4923


Image 4924

Image 4925


Image 4926

Image 4927

Image 4928

Image 4929

Image 4930

Image 4931


Image 4932

Image 4933


Image 4934

Image 4935

Image 4936

Image 4937

Image 4938

Image 4939

Image 4940

Image 4941

Image 4942

Image 4943

Image 4944

Image 4945

Image 4946

Image 4947

Image 4948

Image 4949


Image 4950

Image 4951


Image 4952


Image 4953


Image 4954


Image 4955

Image 4956

Image 4957

Image 4958

Image 4959

Image 4960


Image 4961

Image 4962

Image 4963

Image 4964

Image 4965

Image 4966


Image 4967

Image 4968

Image 4969


Image 4970

Image 4971

Image 4972

Image 4973

Image 4974

Image 4975

Image 4976

Image 4977

Image 4978

Image 4979

Image 4980

Image 4981

Image 4982

Image 4983

Image 4984

Image 4985

Image 4986


Image 4987

Image 4988

Image 4989


Image 4990

Image 4991

Image 4992

Image 4993

Image 4994

Image 4995

Image 4996

Image 4997

Image 4998

Image 4999

Image 5000

Image 5001

Image 5002

 Image 5003

 Image 5004


 Image 5005

 Image 5006

 Image 5007

 Image 5008

 Image 5009

 Image 5010

 Image 5011

 Image 5012

 Image 5013

 Image 5014

 Image 5015

 Image 5016

 Image 5017

 Image 5018

 Image 5019

 Image 5020

 Image 5021

 Image 5022

Image 5023


Image 5024

Image 5025

Image 5026

Image 5027

Image 5028

Image 5029


Image 5030

Image 5031

Image 5032

Image 5033

Image 5034

Image 5035

Image 5036

Image 5037

Image 5038

Image 5039

Image 5040

Image 5041

Image 5042

Image 5043

Image 5044

Image 5045

Image 5046

Image 5047

Image 5048

Image 5049

Image 5050

Image 5051

Image 5052

Image 5053

Image 5054

Image 5055

Image 5056

Image 5057

Image 5058

Image 5059

Image 5060

Image 5061

Image 5062

Image 5063


Image 5064

Image 5065

Image 5066


Image 5067

Image 5068

Image 5069

Image 5070

Image 5071

Image 5072

Image 5073

Image 5074

Image 5075

Image 5076

Image 5077

Image 5078

Image 5079

Image 5080

Image 5081

Image 5082

 Image 5083

 Image 5084


 Image 5085

 Image 5086

 Image 5087

 Image 5088

 Image 5089

 Image 5090

 Image 5091

 Image 5092

 Image 5093

 Image 5094

 Image 5095

 Image 5096

 Image 5097

 Image 5098

 Image 5099

 Image 5100

 Image 5101

 Image 5102

Image 5103

Image 5104

Image 5105

Image 5106


Image 5107

Image 5108

Image 5109

Image 5110

Image 5111

Image 5112


Image 5113


Image 5114

Image 5115

Image 5116

Image 5117

Image 5118

Image 5119


Image 5120

Image 5121

Image 5122

Image 5123

Image 5124

Image 5125

Image 5126


Image 5127

Image 5128

Image 5129

Image 5130

Image 5131

Image 5132

Image 5133

Image 5134

Image 5135

Image 5136

Image 5137

Image 5138

Image 5139

Image 5140

Image 5141

Image 5142

Image 5143

Image 5144

Image 5145

Image 5146

Image 5147


Image 5148

Image 5149

Image 5150


Image 5151

Image 5152

Image 5153

Image 5154

Image 5155

Image 5156

Image 5157

Image 5158

Image 5159

Image 5160

Image 5161

Image 5162

 Image 5163

 Image 5164

 Image 5165


 Image 5166

 Image 5167

 Image 5168

 Image 5169

 Image 5170

 Image 5171

 Image 5172

 Image 5173

 Image 5174

 Image 5175

 Image 5176

 Image 5177

 Image 5178

 Image 5179

 Image 5180

 Image 5181

 Image 5182

 Image 5183

 Image 5184

 Image 5185

 Image 5186

 Image 5187

 Image 5188

 Image 5189

 Image 5190

 Image 5191

 Image 5192

 Image 5193

 Image 5194

 Image 5195

 Image 5196

 Image 5197

 Image 5198

 Image 5199

 Image 5200

 Image 5201

 Image 5202

Image 5203


Image 5204

Image 5205

Image 5206

Image 5207

Image 5208

Image 5209

Image 5210

Image 5211

Image 5212


Image 5213


Image 5214


Image 5215

Image 5216

Image 5217

Image 5218

Image 5219

Image 5220


Image 5221

Image 5222

Image 5223

Image 5224

Image 5225

Image 5226

Image 5227

Image 5228

Image 5229

Image 5230

Image 5231

Image 5232

Image 5233

Image 5234

Image 5235

Image 5236

Image 5237

Image 5238

Image 5239

Image 5240

Image 5241

Image 5242

Image 5243

Image 5244

Image 5245

Image 5246


Image 5247

Image 5248

Image 5249

Image 5250

Image 5251

Image 5252

Image 5253

Image 5254

Image 5255

Image 5256




Image 5257

Image 5258

Image 5259

Image 5260


Image 5261

Image 5262

 Image 5263

 Image 5264

 Image 5265

 Image 5266

 Image 5267

 Image 5268

 Image 5269

 Image 5270

 Image 5271

 Image 5272

 Image 5273

 Image 5274

 Image 5275

 Image 5276

 Image 5277

 Image 5278


 Image 5279

 Image 5280


 Image 5281

 Image 5282

 Image 5283

 Image 5284

 Image 5285

 Image 5286

 Image 5287

 Image 5288

 Image 5289

 Image 5290

 Image 5291

 Image 5292

 Image 5293

 Image 5294

 Image 5295

 Image 5296

 Image 5297

 Image 5298

 Image 5299

 Image 5300

 Image 5301

 Image 5302

Image 5303

Image 5304

Image 5305

Image 5306

Image 5307

Image 5308

Image 5309

Image 5310

Image 5311

Image 5312

Image 5313

Image 5314

Image 5315

Image 5316

Image 5317

Image 5318

Image 5319

Image 5320

Image 5321

Image 5322

 Image 5323

 Image 5324

 Image 5325


 Image 5326

 Image 5327

 Image 5328

 Image 5329

 Image 5330

 Image 5331

 Image 5332

 Image 5333

 Image 5334

 Image 5335

 Image 5336

 Image 5337

 Image 5338

 Image 5339

 Image 5340

 Image 5341

 Image 5342

 Image 5343

 Image 5344

 Image 5345

 Image 5346

 Image 5347

 Image 5348

 Image 5349

 Image 5350

 Image 5351

 Image 5352


 Image 5353

 Image 5354

 Image 5355

 Image 5356

 Image 5357

 Image 5358


 Image 5359

 Image 5360



 Image 5361

 Image 5362

 Image 5363

 Image 5364

 Image 5365


 Image 5366

 Image 5367

 Image 5368


 Image 5369

 Image 5370

 Image 5371


 Image 5372

 Image 5373

 Image 5374

 Image 5375

 Image 5376

 Image 5377

 Image 5378

 Image 5379

 Image 5380

 Image 5381

 Image 5382

 Image 5383

 Image 5384

 Image 5385

 Image 5386

 Image 5387

 Image 5388

 Image 5389

 Image 5390

 Image 5391

 Image 5392

 Image 5393

 Image 5394

 Image 5395

 Image 5396

 Image 5397

 Image 5398

 Image 5399

 Image 5400

 Image 5401

 Image 5402

 Image 5403

 Image 5404

 Image 5405


 Image 5406

 Image 5407

 Image 5408

 Image 5409

 Image 5410

 Image 5411

 Image 5412

 Image 5413

 Image 5414

 Image 5415

 Image 5416

 Image 5417

 Image 5418

 Image 5419

 Image 5420

 Image 5421

 Image 5422


 Image 5423

 Image 5424

 Image 5425


 Image 5426

 Image 5427

 Image 5428

 Image 5429

 Image 5430

 Image 5431

 Image 5432

 Image 5433

 Image 5434

 Image 5435

 Image 5436

 Image 5437

 Image 5438

 Image 5439

 Image 5440

 Image 5441

 Image 5442

 Image 5443

 Image 5444

 Image 5445

 Image 5446

 Image 5447

 Image 5448

 Image 5449

 Image 5450

 Image 5451

 Image 5452

 Image 5453

 Image 5454

 Image 5455

 Image 5456

 Image 5457

 Image 5458

 Image 5459

 Image 5460

 Image 5461

 Image 5462

 Image 5463

 Image 5464


 Image 5465

 Image 5466

 Image 5467

 Image 5468

 Image 5469

 Image 5470

 Image 5471

 Image 5472

 Image 5473

 Image 5474

 Image 5475

 Image 5476

 Image 5477

 Image 5478

 Image 5479

 Image 5480

 Image 5481

 Image 5482

 Image 5483

 Image 5484

 Image 5485

 Image 5486

 Image 5487

 Image 5488

 Image 5489

 Image 5490

 Image 5491

 Image 5492

 Image 5493

 Image 5494

 Image 5495

 Image 5496

 Image 5497

 Image 5498

 Image 5499


 Image 5500

 Image 5501

 Image 5502

 Image 5503

 Image 5504

 Image 5505


 Image 5506

 Image 5507

 Image 5508

 Image 5509

 Image 5510

 Image 5511

 Image 5512

 Image 5513

 Image 5514

 Image 5515

 Image 5516

 Image 5517

 Image 5518

 Image 5519

 Image 5520

 Image 5521

 Image 5522

 Image 5523

 Image 5524

 Image 5525

 Image 5526

 Image 5527

 Image 5528

 Image 5529

 Image 5530

 Image 5531

 Image 5532

 Image 5533

 Image 5534

 Image 5535

 Image 5536

 Image 5537

 Image 5538

 Image 5539

 Image 5540

 Image 5541

 Image 5542

 Image 5543

 Image 5544

 Image 5545

 Image 5546

 Image 5547

 Image 5548

 Image 5549

 Image 5550

 Image 5551

 Image 5552

 Image 5553

 Image 5554

 Image 5555

 Image 5556

 Image 5557

 Image 5558

 Image 5559

 Image 5560

 Image 5561

 Image 5562

Image 5563


Image 5564

Image 5565

Image 5566


Image 5567

Image 5568

Image 5569

Image 5570

Image 5571


Image 5572


Image 5573

Image 5574

Image 5575

Image 5576

Image 5577

Image 5578



Image 5579

Image 5580

Image 5581


Image 5582

 Image 5583

 Image 5584

 Image 5585

 Image 5586


 Image 5587

 Image 5588

 Image 5589

 Image 5590

 Image 5591

 Image 5592

 Image 5593

 Image 5594

 Image 5595

 Image 5596

 Image 5597

 Image 5598

 Image 5599

 Image 5600

 Image 5601

 Image 5602

 Image 5603

 Image 5604

 Image 5605

 Image 5606

 Image 5607

 Image 5608

 Image 5609

 Image 5610

 Image 5611

 Image 5612

 Image 5613

 Image 5614

 Image 5615

 Image 5616

 Image 5617

 Image 5618

 Image 5619

 Image 5620

 Image 5621

 Image 5622

 Image 5623

 Image 5624


 Image 5625

 Image 5626

 Image 5627

 Image 5628

 Image 5629

 Image 5630

 Image 5631

 Image 5632

 Image 5633

 Image 5634

 Image 5635

 Image 5636

 Image 5637

 Image 5638

 Image 5639

 Image 5640

 Image 5641

 Image 5642

Image 5643


Image 5644

Image 5645

Image 5646


Image 5647

Image 5648

Image 5649

Image 5650

Image 5651

Image 5652

Image 5653

Image 5654

Image 5655

Image 5656

Image 5657

Image 5658

Image 5659

Image 5660

Image 5661

Image 5662

Image 5663


Image 5664

Image 5665

Image 5666


Image 5667

Image 5668

Image 5669

Image 5670

Image 5671

Image 5672

Image 5673

Image 5674

Image 5675

Image 5676

Image 5677

Image 5678

Image 5679

Image 5680

Image 5681

Image 5682

Image 5683

Image 5684

Image 5685

Image 5686


Image 5687

Image 5688

Image 5689

Image 5690

Image 5691

Image 5692


Image 5693

Image 5694

Image 5695

Image 5696

Image 5697

Image 5698

Image 5699

Image 5700

Image 5701

Image 5702

Image 5703

Image 5704

Image 5705

Image 5706


Image 5707

Image 5708

Image 5709

Image 5710

Image 5711

Image 5712

Image 5713

Image 5714

Image 5715

Image 5716

Image 5717

Image 5718

Image 5719

Image 5720

Image 5721

Image 5722

Image 5723

Image 5724

Image 5725

Image 5726

Image 5727

Image 5728

Image 5729

Image 5730

Image 5731

Image 5732

Image 5733

Image 5734

Image 5735

Image 5736

Image 5737

Image 5738

Image 5739

Image 5740

Image 5741

Image 5742


 Image 5743

 Image 5744

 Image 5745


 Image 5746

 Image 5747

 Image 5748

 Image 5749

 Image 5750

 Image 5751

 Image 5752

 Image 5753

 Image 5754

 Image 5755

 Image 5756

 Image 5757

 Image 5758

 Image 5759

 Image 5760

 Image 5761

 Image 5762

 Image 5763

 Image 5764

 Image 5765

 Image 5766

 Image 5767

 Image 5768

 Image 5769

 Image 5770

 Image 5771

 Image 5772

 Image 5773

 Image 5774

 Image 5775

 Image 5776

 Image 5777

 Image 5778

 Image 5779

 Image 5780

 Image 5781

 Image 5782

 Image 5783

 Image 5784

 Image 5785


 Image 5786

 Image 5787

 Image 5788

 Image 5789

 Image 5790

 Image 5791

 Image 5792

 Image 5793

 Image 5794

 Image 5795

 Image 5796

 Image 5797

 Image 5798

 Image 5799

 Image 5800

 Image 5801

 Image 5802

 Image 5803

 Image 5804


 Image 5805

 Image 5806


 Image 5807

 Image 5808

 Image 5809

 Image 5810

 Image 5811

 Image 5812

 Image 5813

 Image 5814

 Image 5815

 Image 5816

 Image 5817

 Image 5818

 Image 5819

 Image 5820

 Image 5821

 Image 5822

 Image 5823

 Image 5824

 Image 5825

 Image 5826

 Image 5827

 Image 5828

 Image 5829

 Image 5830

 Image 5831

 Image 5832

 Image 5833

 Image 5834

 Image 5835

 Image 5836

 Image 5837

 Image 5838

 Image 5839

 Image 5840

 Image 5841

 Image 5842

Image 5843

Image 5844

Image 5845

Image 5846


Image 5847

Image 5848

Image 5849


Image 5850

Image 5851

Image 5852

Image 5853

Image 5854

Image 5855

Image 5856

Image 5857

Image 5858

Image 5859


Image 5860

Image 5861

Image 5862

 Image 5863

 Image 5864

 Image 5865


 Image 5866

 Image 5867

 Image 5868

 Image 5869

 Image 5870

 Image 5871

 Image 5872

 Image 5873

 Image 5874

 Image 5875

 Image 5876

 Image 5877

 Image 5878

 Image 5879

 Image 5880

 Image 5881

 Image 5882

Image 5883

Image 5884

Image 5885

Image 5886

Image 5887

Image 5888

Image 5889

Image 5890


Image 5891

Image 5892


Image 5893

Image 5894

Image 5895

Image 5896



 Image 5979

 Image 5980

 Image 5981

 Image 5982

 Image 5983

 Image 5984


 Image 5985

 Image 5986

 Image 5987

 Image 5988

 Image 5989

 Image 5990

 Image 5991

 Image 5992



 Image 5993

 Image 5994

 Image 5995


 Image 5996

 Image 5997

 Image 5998

 Image 5999

 Image 6000

 Image 6001

 Image 6002

 Image 6003

 Image 6004

 Image 6005

 Image 6006

 Image 6007

 Image 6008

 Image 6009

 Image 6010

 Image 6011

 Image 6012

Image 6013


Image 6014

Image 6015

Image 6016

Image 6017

Image 6018

Image 6019

Image 6020


Image 6021

Image 6022

Image 6023

Image 6024

Image 6025

Image 6026

Image 6027

Image 6028

Image 6029

Image 6030

Image 6031

Image 6032

Image 6033

Image 6034

Image 6035

Image 6036


Image 6037

Image 6038

Image 6039

Image 6040

Image 6041

Image 6042

Image 6043

Image 6044

Image 6045

Image 6046

Image 6047

Image 6048

Image 6049

Image 6050

Image 6051

Image 6052

Image 6053


Image 6054

Image 6055

Image 6056


Image 6057

Image 6058

Image 6059

Image 6060

Image 6061

Image 6062


Image 6063

Image 6064

Image 6065

Image 6066

Image 6067

Image 6068

Image 6069

Image 6070

Image 6071

Image 6072

Image 6073


Image 6074

Image 6075

Image 6076

Image 6077

Image 6078

Image 6079

Image 6080

Image 6081

Image 6082

Image 6083

Image 6084

Image 6085

Image 6086

Image 6087

Image 6088

Image 6089

Image 6090

Image 6091

Image 6092

Image 6093

Image 6094

Image 6095

Image 6096


Image 6097

Image 6098

Image 6099


Image 6100

Image 6101

Image 6102

Image 6103

Image 6104

Image 6105

Image 6106

Image 6107

Image 6108

Image 6109

Image 6110

Image 6111

Image 6112



Image 6113

Image 6114

Image 6115


Image 6116

Image 6117

Image 6118

Image 6119

Image 6120

Image 6121

Image 6122

Image 6123

Image 6124

Image 6125

Image 6126

Image 6127

Image 6128

Image 6129

Image 6130

Image 6131

Image 6132

Image 6133


Image 6134

Image 6135

Image 6136

Image 6137

Image 6138

Image 6139

Image 6140

Image 6141

Image 6142

Image 6143


Image 6144


Image 6145

Image 6146

Image 6147

Image 6148

Image 6149

Image 6150


Image 6151

Image 6152

Image 6153

Image 6154

Image 6155

Image 6156

Image 6157

Image 6158

Image 6159

Image 6160

Image 6161

Image 6162

Image 6163

Image 6164

Image 6165

Image 6166

Image 6167

Image 6168

Image 6169

Image 6170

Image 6171

Image 6172

 Image 6173

 Image 6174

 Image 6175


 Image 6176

 Image 6177

 Image 6178

 Image 6179

 Image 6180

 Image 6181

 Image 6182

 Image 6183

 Image 6184

 Image 6185

 Image 6186

 Image 6187

 Image 6188

 Image 6189

 Image 6190

 Image 6191

 Image 6192


 Image 6193

 Image 6194

 Image 6195

 Image 6196

 Image 6197

 Image 6198

 Image 6199

 Image 6200

 Image 6201

 Image 6202

 Image 6203

 Image 6204

 Image 6205

 Image 6206

 Image 6207

 Image 6208

 Image 6209

 Image 6210

 Image 6211


 Image 6212

Image 6213

Image 6214

Image 6215

Image 6216

Image 6217


Image 6218

Image 6219

Image 6220

Image 6221

Image 6222

Image 6223

Image 6224

Image 6225

Image 6226

Image 6227

Image 6228

Image 6229

Image 6230

Image 6231

Image 6232

Image 6233

Image 6234

Image 6235

Image 6236


Image 6237

Image 6238

Image 6239

Image 6240

Image 6241

Image 6242

Image 6243

Image 6244

Image 6245

Image 6246

Image 6247

Image 6248

Image 6249

Image 6250

Image 6251

Image 6252

Image 6253


Image 6254

Image 6255

Image 6256

Image 6257

Image 6258

Image 6259

Image 6260

Image 6261

Image 6262

Image 6263

Image 6264

Image 6265

Image 6266

Image 6267

Image 6268

Image 6269

Image 6270

Image 6271

Image 6272

 Image 6273

 Image 6275

 Image 6276


 Image 6277

 Image 6278


 Image 6279

 Image 6280

 Image 6281

 Image 6282

 Image 6283

 Image 6284

 Image 6285

 Image 6286

 Image 6287

 Image 6288

 Image 6289

 Image 6290

 Image 6291

 Image 6292

Image 6293

Image 6294

Image 6295

Image 6296

Image 6297

Image 6298

Image 6299

Image 6300

Image 6301

Image 6302

Image 6303

Image 6304

Image 6305

Image 6306

Image 6307

Image 6308

Image 6309

Image 6310

Image 6311

Image 6312


 Image 6313

 Image 6314


 Image 6315

 Image 6316

 Image 6317

 Image 6318

 Image 6319

 Image 6320

 Image 6321

 Image 6322

 Image 6323

 Image 6324

 Image 6325

 Image 6326

 Image 6327

 Image 6328

 Image 6329

 Image 6330

 Image 6331

 Image 6332

Image 6333

Image 6334

Image 6335

Image 6336

Image 6337

Image 6338

Image 6339

Image 6340

Image 6341

Image 6342

Image 6343

Image 6344

Image 6345

Image 6346

Image 6347

Image 6348

Image 6349

Image 6350

Image 6351

Image 6352

Image 6353


Image 6354

Image 6355

Image 6356


Image 6357

Image 6358

Image 6359

Image 6360

Image 6361

Image 6362

Image 6363

Image 6364

Image 6365

Image 6366

Image 6367

Image 6368

Image 6369

Image 6370

Image 6371

Image 6372

 Image 6373

 Image 6374

 Image 6375

 Image 6376

 Image 6377

 Image 6378

 Image 6379

 Image 6380

 Image 6381

 Image 6382

 Image 6383

 Image 6384

 Image 6385

 Image 6386

 Image 6387

 Image 6388

 Image 6389

 Image 6390

 Image 6391

 Image 6392

Image 6393

Image 6394

Image 6395

Image 6396

Image 6397

Image 6398

Image 6399

Image 6400

Image 6401

Image 6402

Image 6403

Image 6404

Image 6405

Image 6406

Image 6407

Image 6408

Image 6409

Image 6410

Image 6411

Image 6412


Image 6413

Image 6414

Image 6415


Image 6416

Image 6417

Image 6418

Image 6419

Image 6420

Image 6421

Image 6422

Image 6423

Image 6424

Image 6425

Image 6426

Image 6427

Image 6428

Image 6429

Image 6430

Image 6431

Image 6432

 Image 6433

 Image 6434

 Image 6435

 Image 6436

 Image 6437

 Image 6438

 Image 6439

 Image 6440

 Image 6441

 Image 6442

 Image 6443

 Image 6444

 Image 6445

 Image 6446

 Image 6447

 Image 6448

 Image 6449

 Image 6450

 Image 6451

 Image 6452

Image 6453

Image 6454

Image 6455

Image 6456


Image 6457

Image 6458

Image 6459

Image 6460

Image 6461

Image 6462

Image 6463

Image 6464

Image 6465

Image 6466

Image 6467

Image 6468

Image 6469

Image 6470

Image 6471

Image 6472

Image 6473


Image 6474

Image 6475

Image 6476

Image 6477


Image 6478

Image 6479

Image 6480

Image 6481

Image 6482

Image 6483

Image 6484

Image 6485

Image 6486

Image 6487

Image 6488

Image 6489

Image 6490

Image 6491

Image 6492

Image 6493


Image 6494

Image 6495

Image 6496

Image 6497

Image 6498

Image 6499

Image 6500

Image 6501

Image 6502

Image 6503

Image 6504

Image 6505

Image 6506

Image 6507

Image 6508

Image 6509

Image 6510

Image 6511

Image 6512

Image 6513

Image 6514

Image 6515


Image 6516


Image 6517

Image 6518

Image 6519

Image 6520

Image 6521

Image 6522


Image 6523

Image 6524

Image 6525

Image 6526

Image 6527

Image 6528

Image 6529

Image 6530

Image 6531

Image 6532

Image 6533

Image 6534

Image 6535

Image 6536


Image 6537

Image 6538

Image 6539

Image 6540

Image 6541

Image 6542

Image 6543

Image 6544

Image 6545

Image 6546

Image 6547

Image 6548

Image 6549

Image 6550

Image 6551

Image 6552

Image 6553

Image 6554


Image 6555

Image 6556

Image 6557


Image 6558

Image 6559

Image 6560

Image 6561

 Image 6562

 Image 6563


 Image 6564

 Image 6565

 Image 6566

 Image 6567

 Image 6568

 Image 6569

 Image 6570

 Image 6571

 Image 6572

 Image 6573

 Image 6574

 Image 6575

 Image 6576

 Image 6577

 Image 6578

 Image 6579

 Image 6580

 Image 6581


 Image 6582

 Image 6583

 Image 6584


 Image 6585

 Image 6586

 Image 6587

 Image 6588

 Image 6589

 Image 6590

 Image 6591

 Image 6592

 Image 6593

 Image 6594

 Image 6595

 Image 6596

 Image 6597

 Image 6598

 Image 6599

 Image 6600

 Image 6601

 Image 6602

 Image 6603

 Image 6604

 Image 6605

 Image 6606

 Image 6607

 Image 6608

 Image 6609

 Image 6610

 Image 6611

 Image 6612

 Image 6613

 Image 6614

 Image 6615

 Image 6616

 Image 6617

 Image 6618

 Image 6619

 Image 6620

 Image 6621

 Image 6622

 Image 6623

 Image 6624

 Image 6625

 Image 6626

 Image 6627

 Image 6628

 Image 6629

 Image 6630

 Image 6631

 Image 6632

 Image 6633

 Image 6634

 Image 6635

 Image 6636

 Image 6637

 Image 6638

 Image 6639

 Image 6640

 Image 6641


 Image 6642

 Image 6643

 Image 6644

 Image 6645

 Image 6646

 Image 6647

 Image 6648

 Image 6649

 Image 6650

 Image 6651

 Image 6652

 Image 6653

 Image 6654

 Image 6655

 Image 6656

 Image 6657

 Image 6658

 Image 6659

 Image 6660

 Image 6661

 Image 6662

 Image 6663

 Image 6664

 Image 6665

 Image 6666

 Image 6667

 Image 6668

 Image 6669

 Image 6670

 Image 6671

 Image 6672

 Image 6673

 Image 6674

 Image 6675

 Image 6676

 Image 6677

 Image 6678

 Image 6679

 Image 6680

 Image 6681

 Image 6682


 Image 6683

 Image 6684

 Image 6685

 Image 6686

 Image 6687

 Image 6688

 Image 6689

 Image 6690

 Image 6691

 Image 6692

 Image 6693

 Image 6694

 Image 6695

 Image 6696

 Image 6697

 Image 6698

 Image 6699

 Image 6700

 Image 6701


 Image 6702

 Image 6703

 Image 6704

 Image 6705

 Image 6706

 Image 6707

 Image 6708

 Image 6709

 Image 6710

 Image 6711

 Image 6712

 Image 6713

 Image 6714

 Image 6715

 Image 6716

 Image 6717

 Image 6718

 Image 6719

 Image 6720

 Image 6721

 Image 6722

 Image 6723

 Image 6724

 Image 6725

 Image 6726

 Image 6727

 Image 6728

 Image 6729

 Image 6730

 Image 6731

 Image 6732

 Image 6733

 Image 6734

 Image 6735

 Image 6736

 Image 6737

 Image 6738

 Image 6739

 Image 6740

 Image 6741

 Image 6742

 Image 6743


 Image 6744

 Image 6745

 Image 6746

 Image 6747

 Image 6748

 Image 6749

 Image 6750

 Image 6751

 Image 6752

 Image 6753

 Image 6754

 Image 6755

 Image 6756

 Image 6757

 Image 6758

 Image 6759

 Image 6760

 Image 6761

 Image 6762

 Image 6763

 Image 6764

 Image 6765

 Image 6766

 Image 6767

 Image 6768

 Image 6769

 Image 6770

 Image 6771

 Image 6772

 Image 6773

 Image 6774

 Image 6775

 Image 6776

 Image 6777

 Image 6778

 Image 6779

 Image 6780

 Image 6781

 Image 6782

 Image 6783

 Image 6784

 Image 6785

 Image 6786

 Image 6787

 Image 6788

 Image 6789

 Image 6790

 Image 6791

 Image 6792

 Image 6793

 Image 6794

 Image 6795

 Image 6796

 Image 6797

 Image 6798

 Image 6799

 Image 6800

 Image 6801

 Image 6802

 Image 6803

 Image 6804

 Image 6805

 Image 6806

 Image 6807

 Image 6808

 Image 6809

 Image 6810

 Image 6811

 Image 6812

 Image 6813

 Image 6814

 Image 6815

 Image 6816

 Image 6817

 Image 6818

 Image 6819

 Image 6820

 Image 6821

 Image 6822

 Image 6823

 Image 6824

 Image 6825

 Image 6826

 Image 6827

 Image 6828

 Image 6829

 Image 6830

 Image 6831

 Image 6832

 Image 6833

 Image 6834

 Image 6835

 Image 6836

 Image 6837

 Image 6838

 Image 6839

 Image 6840

 Image 6841

 Image 6842

 Image 6843

 Image 6844

 Image 6845

 Image 6846

 Image 6847

 Image 6848

 Image 6849

 Image 6850

 Image 6851

 Image 6852

 Image 6853

 Image 6854

 Image 6855

 Image 6856

 Image 6857

 Image 6858

 Image 6859

 Image 6860

 Image 6861

 Image 6862

 Image 6863

 Image 6864

 Image 6865

 Image 6866

 Image 6867

 Image 6868

 Image 6869

 Image 6870

 Image 6871

 Image 6872

 Image 6873

 Image 6874

 Image 6875

 Image 6876

 Image 6877

 Image 6878

 Image 6879

 Image 6880

 Image 6881

 Image 6882

 Image 6883

 Image 6884

 Image 6885

 Image 6886

 Image 6887

 Image 6888

 Image 6889

 Image 6890

 Image 6891

 Image 6892

 Image 6893

 Image 6894

 Image 6895

 Image 6896

 Image 6897

 Image 6898

 Image 6899

 Image 6900

 Image 6901

 Image 6902

 Image 6903

 Image 6904

 Image 6905

 Image 6906

 Image 6907

 Image 6908

 Image 6909

 Image 6910

 Image 6911

 Image 6912

 Image 6913

 Image 6914

 Image 6915

 Image 6916

 Image 6917

 Image 6918

 Image 6919

 Image 6920

 Image 6921

 Image 6922

 Image 6923

 Image 6924

 Image 6925

 Image 6926

 Image 6927

 Image 6928

 Image 6929

 Image 6930

 Image 6931

 Image 6932

 Image 6933

 Image 6934

 Image 6935

 Image 6936

 Image 6937

 Image 6938

 Image 6939

 Image 6940

 Image 6941

 Image 6942

 Image 6943

 Image 6944

 Image 6945

 Image 6946

 Image 6947

 Image 6948

 Image 6949

 Image 6950

 Image 6951

 Image 6952

 Image 6953

 Image 6954

 Image 6955

 Image 6956

 Image 6957

 Image 6958

 Image 6959

 Image 6960

 Image 6961

 Image 6962

 Image 6963

 Image 6964

 Image 6965

 Image 6966

 Image 6967

 Image 6968

 Image 6969

 Image 6970

 Image 6971

 Image 6972

 Image 6973

 Image 6974

 Image 6975

 Image 6976

 Image 6977

 Image 6978

 Image 6979

 Image 6980

 Image 6981

 Image 6982

 Image 6983

 Image 6984

 Image 6985

 Image 6986

 Image 6987

 Image 6988

 Image 6989

 Image 6990

 Image 6991

 Image 6992

 Image 6993

 Image 6994

 Image 6995

 Image 6996

 Image 6997

 Image 6998

 Image 6999

 Image 7000

 Image 7001

 Image 7002

 Image 7003

 Image 7004


 Image 7005

 Image 7006

 Image 7007

 Image 7008

 Image 7009

 Image 7010

 Image 7011

 Image 7012

 Image 7013

 Image 7014

 Image 7015

 Image 7016

 Image 7017

 Image 7018

 Image 7019

 Image 7020

 Image 7021


 Image 7022

 Image 7023

 Image 7024

 Image 7025

 Image 7026

 Image 7027

 Image 7028

 Image 7029

 Image 7030

 Image 7031

 Image 7032

 Image 7033

 Image 7034

 Image 7035

 Image 7036

 Image 7037

 Image 7038

 Image 7039

 Image 7040

 Image 7041

 Image 7042

 Image 7043


 Image 7044

 Image 7045

 Image 7046

 Image 7047

 Image 7048

 Image 7049

 Image 7050

 Image 7051

 Image 7052

 Image 7053

 Image 7054

 Image 7055

 Image 7056

 Image 7057

 Image 7058

 Image 7059

 Image 7060

 Image 7061


 Image 7062

 Image 7063

 Image 7064

 Image 7065

 Image 7066

 Image 7067

 Image 7068

 Image 7069

 Image 7070

 Image 7071

 Image 7072

 Image 7073

 Image 7074

 Image 7075

 Image 7076

 Image 7077

 Image 7078

 Image 7079

 Image 7080

 Image 7081

 Image 7082

 Image 7083

 Image 7084

 Image 7085

 Image 7086

 Image 7087

 Image 7088

 Image 7089

 Image 7090

 Image 7091

 Image 7092

 Image 7093

 Image 7094

 Image 7095

 Image 7096

 Image 7097

 Image 7098

 Image 7099

 Image 7100

 Image 7101

 Image 7102

 Image 7103


 Image 7104

 Image 7105

 Image 7106

 Image 7107

 Image 7108

 Image 7109

 Image 7110

 Image 7111

 Image 7112

 Image 7113

 Image 7114

 Image 7115

 Image 7116


 Image 7117

 Image 7118

 Image 7119

 Image 7120

 Image 7121

 Image 7122

316

9 Dinamica

15

10

5

0

-5

-10

-15 0

1

2

3

4

5

10

8

6

4

Fig. 9.32. Spettro di Fou-

2

rier di un'oscillazione pe-

0

riodica con più armoniche

0

5

10

15

20

25

30

35

40

Data la funzione $x(t)$, la determinazione dei coefficienti a_n b_n della serie di Fourier si ottiene moltiplicando ambedue i membri dell'equazione (9.6.7) per $\cos n\omega t$ o $\sin n\omega t$ e integrando sul periodo T .

Ricordando che si ha:

$$\int$$

" $T/2$

$\int_0^{T/2} \cos m\omega t \cos n\omega t dt = 0$ per $m \neq n$

$\int_0^{T/2} \cos m\omega t \cos m\omega t dt =$

T

- T/2

{

per m = n

2

{

" T/2

{ 0 per m = n

sin Fnt sin Fmt dt =

T

- T/2

{

per m = n

2

"

T/2

0 per m = n

sin Fnt cos Fmt dt =

.

(9.6.8)

$$- T/2$$

$$0 \text{ per } m = n$$

Si otterrà:

"

"

$$T/2$$

$$T/2$$

$$a_n = 2$$

$$x(t) \cos Fnt \, dt$$

$$b_n = 2$$

$$x(t) \sin Fnt \, dt$$

$$T - T/2$$

$$T - T/2$$

$$" T/2$$

$$a_0 = 2$$

$$x(t) \, dt .$$

(9.6.9)

$$T - T/2$$

E facile vedere che a_0 non è altro che il doppio del valor medio della funzione $x(t)$ in un periodo.

 Image 7123

 Image 7124

 Image 7125

 Image 7126

 Image 7127

 Image 7128

 Image 7129

 Image 7130

 Image 7131

 Image 7132

 Image 7133

 Image 7134

 Image 7135

 Image 7136

9.6 Piccole oscillazioni

317

La serie di Fourier può anche essere rappresentata in forma esponenziale.
Sostituendo le espressioni:

$$\cos Fnt = \frac{1}{2} (e^{iFnt} + e^{-iFnt})$$

$$\sin Fnt = \frac{1}{2i} (e^{iFnt} - e^{-iFnt}) .$$

(9.6.10)

2i

Nella (9.6.9), si ottiene:

∞

1

$$x(t) = a_0 + \sum$$

$$(a_n - ib_n)e^{iFnt} + 1(a_n + ib_n)e^{-iFnt}$$

2

2

2

n=1

∞ &

,

$$= a_0 + \sum c_n e^{iFnt} + c_n^* e^{-iFnt}$$

=

2

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{iFnt} + c_n^* e^{-iFnt}$$

n=1

∞

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{iFnt} + c_n^* e^{-iFnt}$$

con

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T (a(t) - ib_n) e^{-in\omega t} dt$$

(9.6.11)

2

2

$n = -\infty$

Sostituendo le espressioni già ottenute per a_n e b_n si ha:

"

"

$T/2$

$T/2$

$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-in\omega t} dt$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) (\cos n\omega t - i \sin n\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-in\omega t} dt$$

(9.6.12)

$T - T/2$

$T - T/2$

Quando i coefficienti della serie di Fourier vengono riportati in un grafico in funzione di $n\omega$, il risultato è una serie di segmenti verticali chiamata spettro di Fourier.

Frequentemente vengono diagrammati i valori assoluti $|2c_n| =$

$(a_2 +)$

n

b_2n e la fase

$(n = \tan^{-1}(b_n / a_n))$.

A titolo d'esempio (Fig. 9.32) si è costruita un'oscillazione composta di tre componenti armoniche, la prima di ampiezza 10 e frequenza 3 Hz, la seconda di ampiezza 4 e frequenza 5 Hz, la terza con ampiezza 2 e frequenza 8 Hz. Il diagramma superiore mostra l'ampiezza in funzione del tempo, quello inferiore mostra i coefficienti della serie di Fourier in valore assoluto.

Gli algoritmi per il calcolo dei coefficienti di Fourier sono disponibili su tutti gli ambienti matematici, come Matlab, Octave, Mathcad e altri. Gli algoritmi sono basati sulla procedura FFT (Fast Fourier Transform) per rendere minimo il tempo di calcolo con elevate precisioni.

Termini utili

È utile ripassare la terminologia riguardante i principali parametri descrittivi dei fenomeni oscillatori. I più semplici sono il valore di picco, cioè l'ampiezza massima dell'oscillazione e il valore medio. Quest'ultimo è dato dall'espressione ben nota:

"

1

T

$\bar{x} = \lim$

$x(t)dt$.

(9.6.13)

$$T \rightarrow \infty \quad T \rightarrow 0$$

Se consideriamo un'oscillazione sinusoidale e applichiamo la formula precedente, troviamo che la media su un ciclo intero della sinusoide $A \sin(t)$, è nulla, su metà ciclo ha il valore:

" >

$$\bar{x} = A$$

=

>

$$\sin t dt = 2A$$

$$0,637 A .$$

0

>

 Image 7137

 Image 7138

 Image 7139

 Image 7140

 Image 7141

 Image 7142

 Image 7143

 Image 7144

 Image 7145


 Image 7146

 Image 7147

 Image 7148

 Image 7149

318

9 Dinamica

Il quadrato dell'ampiezza è in genere associato con l'energia della vibrazione. Il valore quadratico medio è dato dalla formula:

"

1

T

$\overline{x^2} = \lim$

$x^2(t)dt .$

(9.6.14)

$T \rightarrow \infty T 0$

Ad esempio il valore quadratico medio dell'oscillazione $x = A\sin(\omega t)$ ha il valore:

"

"

A^2

T

A²

T

$\overline{x^2} = \lim$

$\int_0^T \sin^2(Ft) dt = \lim$

$\int_0^T (1 - \cos 2Ft) dt = 1A^2 .$

$T \rightarrow \infty$

0

$T \rightarrow \infty$

0

2

2

La radice quadrata del valore quadratico medio prende il nome di valore efficace *root mean square*. Il valore efficace dell'oscillazione $x = A \sin(Ft)$ è:

#1

$x_e =$

$A^2 = 0,707 A .$

(9.6.15)

2

Il decibel è una misura relativa frequentemente usata nelle vibrazioni e in acustica.

Si definisce come $dB = 10 \log (x)$

10

, dove x è il valore misurato e x_{ref}

x_{ref}

è un valore

di

di riferimento. Nel caso dell'acustica la potenza sonora è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'oscillazione del mezzo fluido. Abbiamo allora: (

)

(

)

W

kx^2

x

$dB = 10 \log_{10}$

$= 10 \log_{10}$

$= 20 \log_{10}$

.

(9.6.16)

W_{ref}

kx_{ref}^2

x_{ref}

Essendo il dB un'unità logaritmica essa espande o comprime la scala dei valori, permettendo ad esempio di rappresentare valori molto piccoli delle grandezze insieme a valori molto grandi. Ad esempio la minima pressione acustica udibile è di 20 Pa , la pressione acustica generata da un jet a bassa quota è circa 100 Pa . Se consideriamo la prima pressione come termine di riferimento abbiamo che in dB la pressione acustica del jet vale:

$$100$$

$$20 \log$$

$$=$$

$$10$$

$$134 \text{ dB} .$$

$$20 * 10 - 6$$

Quando in un intervallo di frequenze la frequenza superiore è il doppio di quella inferiore, l'intervallo prende il nome di ottava. Ad esempio l'intervallo tra 10 e 20 Hz è un'ottava con larghezza di banda pari a 10 Hz . L'intervallo tra 20 e 40 Hz è ancora un'ottava con larghezza di banda pari a 20 Hz .

Esempio 9.12. Scrivere la legge di un'oscillazione armonica di ampiezza pari 2 e frequenza pari 5 Hz .

Risposta. La legge è sinusoidale ed è data dalla $x = 2 \sin(2\pi 5t) = 2 \sin(31,4t)$.

Esempio 9.13. Un moto armonico ha un'ampiezza di $0,2 \text{ cm}$ e un periodo di $0,15 \text{ s}$.

Determinare la massima velocità ed accelerazione.

Risposta. La legge del moto è la seguente:

(

)

$$x = 0,02 * \sin 2\pi t$$

$$= 0,02 * \sin(41,87 * t)$$

$$0,15$$

$$\dot{x} = 0,02 * 41,87 * \cos(41,87 * t) = 0,84 \cos(41,87 * t)$$

$$\dot{x}_{\max} = 0,84 \text{ m/s}$$

$$\ddot{x} = -0,02 * 41,87^2 \sin(41,87 * t) = -35,06 * \sin(41,87 * t)$$

$$\ddot{x}_{\max} = -35,06 \text{ m/s}^2.$$

 Image 7150

 Image 7151

 Image 7152

 Image 7153

 Image 7154

9.6 Piccole oscillazioni

319

Fig. 9.33. Oscillatore semplice

I valori massimi si ottengono quando le funzioni seno e coseno assumono valori unitari.

Esempio 9.14. Un moto armonico ha una frequenza di 10 Hz e una velocità massima di 4,57 m/s. Determinare l'ampiezza di vibrazione.

Risposta. Ricordando che:

$$x = A \sin(2\pi f t) = A \sin(2\pi * 10t)$$

$$\dot{x}_{\max} = 2\omega * 10A = 4,57 \text{ m/s}$$

si ha $A = 4,57 = 0,072 \text{ m}$.

$2\omega > 10$

Esercizi

1.

Mostrare che la moltiplicazione di un vettore $z = Ae^{i\omega t}$ per i ruota il vettore stesso di 90° .

2.

Esprimere il vettore complesso $4+3i$ nella forma esponenziale $Ae^{i\omega t}$.

3.

Trovare i coefficienti della serie di Fourier dell'onda rettangolare in figura.

9.6.1 Vibrazioni libere

Tutti i sistemi dotati di massa ed elasticità sono capaci di vibrare liberamente, senza che siano presenti forze eccitatrici. Il nostro principale interesse è quello di scrivere le equazioni del moto e ricavare le frequenze naturali di vibrazione. Osserviamo

 Image 7155

 Image 7156

 Image 7157

 Image 7158

320

9 Dinamica

che la presenza di un modesto grado di smorzamento non altera in modo radicale le vibrazioni libere di un sistema, per cui si procederà spesso nei sistemi debolmente smorzati a trascurare lo smorzamento ed a considerare il sistema conservativo. Questo ci fornirà un altro strumento per il calcolo delle frequenze naturali. Il modello più elementare di sistema oscillante è l'oscillatore semplice, Fig. 9.33, costituito da una massa m , sospesa per mezzo di una molla lineare di costante k . La Fig. 9.33 mostra tre posizioni della massa rispetto alla struttura di sostegno. Nella prima posizione la molla non è deformata. Nella seconda posizione il peso della massa viene applicato alla molla che si deforma, estendendosi di una lunghezza x_0 . Se si lascia che il sistema si stabilizzi, la forza peso P della massa equilibra la reazione della molla $-kx_0$, diretta verso l'alto. Se, partendo dalla situazione di equilibrio precedente, si applica esternamente un'ulteriore deformazione x alla molla, la reazione elastica supera il valore $kx_0 = P$ che aveva in precedenza per assumere il valore $k(x + x_0)$. Il diagramma di corpo libero della massa, nella figura seguente mostra che sulla massa agiscono due forze, il peso proprio P e la reazione della molla $-k(x_0 + x)$. Applicando il secondo principio della dinamica e ricordando il principio di d'Alembert, si ha:

$$-k(x_0 + x) + P - m\ddot{x} = 0 .$$

(9.6.17)

Considerando che $P = kx_0$ si ha quindi l'equazione del moto:

$$m\ddot{x} + kx = 0 .$$

(9.6.18)

Se quindi consideriamo come posizione di riferimento per l'oscillazione quella di equilibrio statico, indicata nella Fig. 9.33 dagli assi X , Y , la forza P viene eliminata dall'equazione che risulta fatta di due soli termini, quello elastico e quello inerziale.

Si tratta di un'equazione differenziale a coefficienti costanti, la cui soluzione è del tipo $x = x_{0est}$. Sostituendo si ha:

$$(ms^2 + k)x_{0est} = 0 .$$

(9.6.19)

Considerando che nell'espressione precedente non può essere nullo x_0 , sarà $m s^2 +$

$$k = 0 \text{ da cui } s = \pm i$$

$$k = \pm iF$$

$= k$. La soluzione generale

m

n avendo posto F^2

n

m

dell'equazione del moto è quindi:

$$x = x_1 e^{iFnt} + x_2 e^{-iFnt}$$

(9.6.20)

che può, ricordando la relazione di Eulero, essere espressa come somma di funzioni armoniche. Ponendo $A = x_1 + x_2$ $B = i(x_1 - x_2)$ si ottiene con semplici passaggi: $x = A \cos(Fn t) + B \sin(Fn t)$.

(9.6.21)

I valori di A e B dipendono dalle condizioni iniziali. Ponendo, infatti, $t = 0$ nell'equazione precedente si ha:

$$x_{t=0} = A .$$

(9.6.22)

Derivando l'equazione del moto, si ha:

$\dot{x} = -A\omega_n \sin(\omega_n t) + B\omega_n \cos(\omega_n t)$ da cui

\dot{x}

(9.6.23)

.

0

$x_{t=0} = B/\omega_n$

$B = \omega_n$

 Image 7159

 Image 7160

 Image 7161

 Image 7162

 Image 7163

 Image 7164

 Image 7165

 Image 7166

 Image 7167

 Image 7168

 Image 7169

 Image 7170

 Image 7171

 Image 7172

 Image 7173

 Image 7174

 Image 7175

 Image 7176

 Image 7177

 Image 7178

 Image 7179

 Image 7180

 Image 7181

9.6 Piccole oscillazioni

321

la soluzione dell'equazione del moto presentata in funzione delle condizioni iniziali è quindi:

\dot{x}_0

$$x = x_0 \cos(Fn t) + F \sin(Fnt) .$$

(9.6.24)

n

Il moto che si instaura è quindi un'oscillazione armonica d'ampiezza costante, con pulsazione F

k

n =

. La frequenza naturale dell'oscillatore è quindi f

m

n = Fn

2> .

Esempio 9.15. Un massa di 0.250 kg è sospesa con una molla di rigidezza pari a 0,2 N/mm. Determinare la frequenza propria del sistema e la deformazione statica della molla.

Risposta. Si ha $= 0,2 * 1000 = 200 \text{ N/m}$

#

-

F =

$k = 200 = 2,82 \text{ rad/s}$

m

0,25

F

f =

= 0,45 Hz

2>

$\Delta = mg = 0,25 * 9,81 = 0,012 \text{ m}$.

k

Esempio 9.16. Determinare la frequenza propria della trave a mensola di massa trascurabile, sopra la quale poggia una massa concentrata M (Fig. 9.34).

Risposta. La freccia della trave all'estremità (si veda paragrafo 9.7) è $x = \frac{PL^3}{3EJ} = P$

$3EJ$

k

con P peso della massa M , L lunghezza della trave, E modulo di Young del materiale della trave, J momento d'inerzia della sezione retta della trave. Si ha quindi:

#

#

#

k

EJ

F

EJ

$k = EJ$

$F =$

$=$

$f_n =$

$= 1$

L3

M

ML3

2>

2>

ML3

Esempio 9.17. Un disco pesante è sospeso attraverso un'asta metallica d'acciaio, di lunghezza 2m e raggio 0,25 cm. Quando al disco si imprime una piccola rotazione, seguita dal rilascio, nascono nel sistema oscillazioni torsionali di frequenza pari a 0,5 Hz. Determinare il momento d'inerzia polare del disco.

Risposta. La legge del moto per le oscillazioni torsionali è analoga a quella scritta per le oscillazioni lineari, a condizione di rimpiazzare la massa col momento d'inerzia e la rigidezza lineare con la rigidezza torsionale. La legge delle oscillazioni libere è quindi:

J''

$$H + kH = 0$$

Fig. 9.34. Modo di vibrare fondamentale di una

trave a mensola

 Image 7182

 Image 7183

 Image 7184

 Image 7185

 Image 7186

 Image 7187

 Image 7188

 Image 7189

 Image 7190

322

9 Dinamica

Fig. 9.35. Oscillatore torsionale

dove J è il momento d'inerzia polare della sezione dell'asta di sospensione e k la sua rigidezza torsionale. Si ha quindi:

#

$F =$

$$k_t = 0,5 \cdot 2 \cdot \text{rad/s} = 3,14 \text{ rad/s} \cdot J$$

ricordando che la rigidezza torsionale di un'asta cilindrica (vedi paragrafo 9.7) è $k_t = GJ_p$, dove G è il modulo di elasticità tangenziale del materiale che costituisce L

l'asta, J_p il momento d'inerzia polare della sua sezione, ed L la lunghezza dell'asta si ha:

$$k_t = GJ_p = 70 \cdot 10^9 \cdot > \cdot 0,00254 = 2,14 \text{ Nm/rad} \cdot L$$

$$2 \cdot 2$$

$$J = k_t = 2,14 =$$

F

0 , 217 kgm² .

2

3 , 142

Esempio 9.18. Una persona di massa pari a 55 kg sta nel centro di una trave di legno che si inflette di 22 mm sotto il suo peso. Se, con un piccolo movimento, s'innesca un'oscillazione verticale, quale sarà la sua frequenza? Si assuma un comportamento elastico della trave e si trascuri la sua massa.

Nel risolvere il problema assumiamo che la trave sia la molla del nostro oscillatore semplice ed abbia una massa trascurabile, la persona costituisca la massa concentrata.

Fig. 9.36. Oscillazione di una trave

appoggiata

 Image 7191

 Image 7192

 Image 7193

 Image 7194

 Image 7195

 Image 7196

 Image 7197

 Image 7198

 Image 7199

 Image 7200

 Image 7201

 Image 7202

 Image 7203

 Image 7204

9.6 Piccole oscillazioni

323

Risposta. Sapendo che per una trave appoggiata agli estremi si ha: $k = P = 55 \cdot 9,81 =$

3

$2,45 \cdot 10^4 \text{ N/m}$

$0,022$

#

F

k

n =

$= 21,11 \text{ rad/s}$

$f_n = 21,11 / 6,28 = 3,35 \text{ Hz}$.

m

Metodo energetico per determinare le frequenze proprie

Se possiamo assumere che il sistema sia privo di smorzamento, quindi conservativo, potremo applicare il teorema di conservazione dell'energia per determinare la frequenza naturale di vibrazione. Nell'oscillazione di un sistema conservativo l'energia è in parte cinetica, in parte potenziale. L'energia cinetica è contenuta nella massa a causa della sua velocità,

l'energia potenziale nell'elemento elastico come energia di deformazione, oppure come lavoro svolto contro la gravità (energia potenziale di posizione). Poiché l'energia totale del sistema deve mantenersi costante, la sua derivata temporale sarà nulla:

$$T + U = \text{costante}$$

$$d(T+U) = 0 .$$

(9.6.25)

dt

Possiamo quindi scrivere per due particolari istanti in seno all'oscillazione.

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 .$$

(9.6.26)

Consideriamo che l'istante 1 corrisponda al passaggio nella configurazione di equilibrio statico, posizione neutra per l'oscillazione e scegliamo il valore $U_1 = 0$ come riferimento per l'energia potenziale in questa posizione. Sia invece l'istante 2 corrispondente alla posizione di massima ampiezza dell'oscillazione. In questa posizione la massa è ferma e $T_2 = 0$. Quindi avremo:

$$T_1 + 0 = 0 + U_2 .$$

(9.6.27)

Poiché il moto è armonico, T_1 e U_2 sono valori massimi, si ha quindi: $T_{\text{max}} = U_{\text{max}}$.

Questa equazione porta alla determinazione della frequenza propria del sistema.

Esempio 9.19. Consideriamo che un oscillatore semplice stia oscillando con la legge del moto $x = A \sin \omega t = A \sin(Ft)$. La legge che rappresenta la velocità sarà: T

(
>)

$$\dot{x} = FA \cos(Ft) = FA \sin Ft +$$

(9.6.28)

2

il valore massimo della velocità è $\dot{x}_{\max} = FA$, la massima energia cinetica sarà quindi $T_{\max} = \frac{1}{2} m F^2 A^2$, quello dell'energia potenziale U

$\frac{k A^2}{2}$ Si ha quindi:

2

$$\max = 1$$

2

#

1

k

F

$$U_{\max} \frac{k A^2}{2} = T_{\max} = \frac{1}{2} m F^2 A^2$$

$$F =$$

$$f =$$

.

(9.6.29)

2

2

m

2>

Il metodo energetico ci porta quindi al valore della pulsazione propria del sistema senza passare per la soluzione di un'equazione differenziale.

L'importanza del metodo energetico si estende anche ad applicazioni su sistemi a molti gradi di libertà

 Image 7205

 Image 7206

 Image 7207

 Image 7208

 Image 7209

 Image 7210

 Image 7211

 Image 7212

 Image 7213

 Image 7214

 Image 7215

 Image 7216

 Image 7217

 Image 7218

 Image 7219

 Image 7220

 Image 7221

 Image 7222

 Image 7223

 Image 7224

324

9 Dinamica

X

L

Fig. 9.37. Sistema con

y

massa e rigidità distri-

Y

buite con continuità

o con massa ed elasticità distribuite con continuità, grazie ad una proprietà dovuta a Rayleigh. La spiegheremo con un esempio. La trave in Fig. 9.37 ha la massa e l'elasticità non concentrate in punti particolari, ma distribuite con continuità. È pertanto un sistema con infiniti gradi di libertà (non è un corpo rigido). Anche le sue frequenze naturali sono infinite, ciascuna di esse corrisponde a una particolare configurazione oscillatoria che prende il nome di modo di vibrare. A destra nella figura sono mostrati a titolo d'esempio i primi tre modi flessionali della trave. Il principio di Rayleigh stabilisce che, se sappiamo descrivere in prima approssimazione la deformata della struttura nel modo di oscillazione che stiamo cercando, la corrispondente pulsazione propria verrà trovata con migliore approssimazione rispetto alla

deformata. Se, per esempio, ricerchiamo la prima frequenza propria di una trave di lunghezza L a sezione costante (Fig. 9.37), possiamo pensare che la deformata sia una funzione algebrica del tempo e della coordinata x che rispetti le condizioni di vincolo, ad esempio ($>$)

x

$$y = y_0 \sin$$

$$\sin(Ft) .$$

$$(9.6.30)$$

L

La funzione adottata rispetta i vincoli. Vale zero per $x = 0$ e $x = L$, vale y_0 per $x = L / 2$. L'energia cinetica nell'oscillazione è la somma delle energie cinetiche elementari di tutti gli elementi di massa della trave. Ogni elemento infinitesimo di massa

Δx oscilla con ampiezza y intorno alla sua posizione d'equilibrio. La sua legge del moto, la sua velocità e la sua energia cinetica, sono:

$$y = y_0 \sin(Ft)$$

$$\dot{y} = F y_0 \cos(Ft) \quad dT = \frac{1}{2} A \dot{y}^2 dx = \frac{1}{2} A F^2 y_0^2 \cos^2(Ft) dx .$$

$$(9.6.31)$$

L'energia cinetica massima della trave si ottiene eguagliando ad 1 il termine $\cos^2(Ft)$ e integrando su tutta la lunghezza:

"

"

"

L

L

L

>x

Tmax = 1 ?

A'y2dx = 1 ?

AF2y2

F2?A

sin2

dx .

(9.6.32)

2

0dx = 1

0

2

0

2

0

L

L'energia di deformazione elastica è data per la flessione, dall'espressione:
 $dU = 1 MdH ,$

2

se le deformazioni della trave sono piccole si ha:

(>

(

)

2

>

$H = dy$

$1 = d^2y = -$

x

$y_0 \sin$

$\sin(Ft)$

$1 = M (9.6.33)$

dx

R

dx²

L

L

R

EJ

con R raggio di curvatura della trave. Sostituendo, l'energia potenziale elastica massima della trave diventa:

"

"

"

L

2

(

)

M2

L

d²y

>4 L

>x

U_{max} = 1

dx = 1

EJ

dx = 1

EJ sin²

dx . (9.6.34)

2 0 EJ

2 0

dx2

2 L4 0

L

 Image 7225

 Image 7226

 Image 7227

 Image 7228

 Image 7229

 Image 7230

 Image 7231

 Image 7232

 Image 7233

 Image 7234

 Image 7235

 Image 7236

 Image 7237

 Image 7238

 Image 7239

 Image 7240

9.6 Piccole oscillazioni

Eguagliando le due espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale massime, si ottiene:

"

"

L

>

(

)

x

>4 L

>x

$T_{\max} = \frac{1}{2} F A \sin^2$

\sin^2

$dx = U_{\max} = 1$

$EJ \sin^2$

dx

2

0

L

$2 L^4 0$

L

"

(

)

$1 > 4$

L

$> x$

$EJ \sin^2$

dx

#

> 4

$F_2 = 2 L^4$

EJ

EJ

0

L

"

=

$F = > 2$

.

(9.6.35)

1

L

>

?

x

?AL4

?AL4

A

sin²

dx

2

0

L

Poiché la funzione scelta per il modo è accidentalmente quella esatta, il valore di F

risulta esatto. Ogni altra curva assunta sarebbe equivalente all'introduzione di vincoli addizionali, portando a valori superiori di F rispetto a quello esatto. Il lettore può per esercizio cimentarsi con altri tipi di curve, ad esempio una parabola, con coefficienti tali da rispettare le condizioni di vincolo.

Metodo delle masse concentrate

Il metodo di Rayleigh può essere impiegato per ottenere la frequenza propria fondamentale (cioè la più bassa) di una trave rappresentata da una serie di masse concentrate. Come prima approssimazione assumiamo come deformata del modo la deformata statica dovuta al peso delle masse M_1g , M_2g , M_3g , ... con corrispondenti frequenze, y_1 , y_2 , y_3 , ... L'energia potenziale immagazzinata nella trave è data dal lavoro compiuto dai pesi delle masse concentrate, l'energia cinetica dalla somma delle loro energie cinetiche singole. Si ha quindi:

$$U_{\max} = g(M_1y_1 + M_2y_2 + M_3y_3 + \dots)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2}(M_1y_1^2 + M_2y_2^2 + M_3y_3^2 + \dots)$$

(9.6.36)

2

1

2

3

$$F^2 = g \sum_i M_i y_i$$

$$\sum_i M_i y_i^2$$

Oscillatore semplice smorzato

Quello che genericamente viene chiamato smorzamento è un fenomeno dovuto a una molteplicità di cause, sia interne che esterne al sistema in esame. Può essere incluso tra gli effetti di smorzamento l'attrito che un corpo incontra nello strisciamento su una superficie, sia con l'intermediazione di un lubrificante, sia in modo diretto.

Quando due organi sono accoppiati mediante un'articolazione, esiste un movimento relativo e nascono sempre azioni d'attrito che dissipano energia. Un altro genere di resistenze passive nasce dallo smorzamento interno presente in tutti i materiali, dovuto a fenomeni d'attrito nelle dislocazioni e

al contorno dei grani cristallini, o all'azione delle forze molecolari. Tutte le azioni dissipative possono essere convenientemente rappresentate da leggi matematiche più o meno approssimate. Ci limiteremo nel nostro caso a trattare lo smorzamento viscoso, espresso dalla relazione $F_d = c \cdot \dot{x}$. Passando alla scrittura delle equazioni d'equilibrio dinamico del nostro oscillatore con

 Image 7241

 Image 7242

 Image 7243

 Image 7244

 Image 7245

 Image 7246

 Image 7247

 Image 7248

 Image 7249

 Image 7250

 Image 7251

 Image 7252

 Image 7253

 Image 7254

326

9 Dinamica

Fig. 9.38. Oscillatore smorzato

smorzamento viscoso, si ha, scrivendo il diagramma di corpo libero della massa m:

$$- m\ddot{x} - c\dot{x} - kx = 0 .$$

(9.6.37)

Cambiando segno a tutta l'equazione e dividendo per m si ha la forma canonica: k

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \text{ ricordando che}$$

$$= F_2$$

$$m$$

$$m$$

$$m$$

$$n$$

e definendo lo smorzamento critico

$$c_c = 2mF_n \text{ si ha:}$$

$$\ddot{x} + 2=F_n \dot{x} + F_2 =$$

$$=$$

$$c$$

$$n$$

$$0$$

dove si è posto

$$= = c$$

(9.6.38)

c

$2m\omega_n$

il termine ω_n è la pulsazione naturale non smorzata del nostro oscillatore, cioè la pulsazione in rad/s delle oscillazioni libere del sistema, in assenza di smorzamento, $c = 2m\omega_n$ è lo smorzamento critico del sistema, cioè quel particolare valore dello smorzamento al disopra del quale la risposta a una qualunque eccitazione. La soluzione dell'equazione scritta è ancora del tipo:

$$x = x_0 e^{st}$$

(9.6.39)

Sostituendo nell'equazione d'equilibrio dinamico si ha:

$$(ms^2 + cs + k)x_0 e^{st} = 0$$

(9.6.40)

Perché la soluzione non sia banalmente $x = 0$, corrispondente all'assenza di movimento, occorre che sia $ms^2 + cs + k = 0$, che costituisce un'equazione di secondo grado a coefficienti costanti in s , con soluzioni:

$\sqrt{}$

$$-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}$$

$$s_{1, 2} =$$

$$= -\frac{c}{2m} \pm i\omega_n \sqrt{1 - \frac{c^2}{4m^2\omega_n^2}} = -\frac{c}{2m} \pm i\omega_d \quad (9.6.41)$$

$2m$

in cui

#

F

k

n =

= =

c

= c

m

$2mFn$

cc

il termine F_n è la pulsazione naturale del nostro oscillatore, cioè la pulsazione delle oscillazioni libere del sistema, in assenza di smorzamento, il termine $F_d = F_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

 Image 7255

 Image 7256

 Image 7257

 Image 7258

 Image 7259

 Image 7260

 Image 7261

 Image 7262

 Image 7263

 Image 7264

 Image 7265

9.6 Piccole oscillazioni

327

è la pulsazione delle oscillazioni smorzate. Se il radicando

$1 - \zeta^2$ è negativo, lo

smorzamento relativo è superiore allo smorzamento critico e le due radici s sono reali e negative, si ha quindi: $\sqrt{1 - \zeta^2}$

$\sqrt{1 - \zeta^2}$

$x = A$

$(-\zeta \pm \sqrt{1 - \zeta^2}) * t$

$(-\zeta \pm \sqrt{1 - \zeta^2}) * t$

$1e^{(-\zeta \pm \sqrt{1 - \zeta^2})t}$

$+ A_2 e^{(-\zeta \mp \sqrt{1 - \zeta^2})t}$

.

(9.6.42)

Il moto che s'instaura, quando siano fissate le condizioni iniziali, è aperiodico, tendente ad estinguersi completamente col procedere del tempo. Per $\zeta = 1$ il moto è ancora aperiodico con smorzamento critico, le due radici s_1 e s_2 coincidono e l'integrale generale dell'equazione del moto si può scrivere:

$x = (A_1 + A_2 t) e^{-\zeta t}$.

(9.6.43)

Se infine il radicando è positivo (smorzamento minore di quello critico) le due radici s_1 ed s_2 sono complesse e la legge del moto è:

$$\sqrt{\dots}$$

$$\sqrt{\dots}$$

$$x = A$$

$$e^{-(\gamma/2)t}$$

$$e^{-(\gamma/2)t}$$

$$e^{-(\gamma/2)t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)]$$

$$+ A_2 e^{-(\gamma/2)t} \sin(\omega_d t)$$

.

(9.6.44)

Si tratta di un moto oscillatorio smorzato che si può scrivere in forme differenti:

*

+

$$x = e^{-(\gamma/2)t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)] + i(A_1 - A_2) \sin(\omega_d t) e^{-(\gamma/2)t}$$

$$= e^{-(\gamma/2)t} [(A_3 \cos(\omega_d t) + A_4 \sin(\omega_d t))] = e^{-(\gamma/2)t} C \cos(\omega_d t - C)$$

(9.6.45)

È facile vedere che le ampiezze introdotte nella legge di oscillazione devono essere determinate mediante le condizioni iniziali del moto, in particolare i valori di x e \dot{x} per $t = 0$. Riferendoci all'ultima espressione si ha

$$x_{t=0} = x_0 = A_3$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = -\omega_n A_4 + \omega_d A_3$$

$$\dot{x}_0 + \omega_n x_0$$

A

(9.6.46)

$$3 = x_0$$

$$A_4 =$$

Fd

$$\dot{x}_0 + \omega_n x_0$$

$$x = e^{-\omega_n t}$$

.

F

$$\sin(\omega_d t) + x_0 \cos(\omega_d t)$$

d

L'ultima relazione scritta è l'espressione della risposta in funzione delle condizioni iniziali.

Esempio 9.20. Consideriamo sempre l'Esempio 9.15 e supponiamo questa volta che la trave sia dotata di smorzamento inferiore a quello critico e pari a $\zeta = 0,1$. Supponiamo che le condizioni iniziali siano prodotte con una leggera flessione del corpo in modo tale da realizzare una freccia di 15 cm al centro della trave. Si ha in questo caso:

$$A_4 = 0$$

$$A_3 = 0,2 \text{ m} = 0,1$$

$$F_d = 1 - 2F_n = 0,99 * 21,11 = 21,00 \text{ rad/s} \quad x = 0,2e^{-0,99 * 21,11 * t} * 0,15 \cos(21 * t)$$


 Image 7266

 Image 7267

 Image 7268

 Image 7269

 Image 7270

 Image 7271

328

9 Dinamica

x

0.1

x_n

0.05

x_{n+1}

0

-0.05

-0.1

t (s)

0

0.5

1

1.5

2

2.5

3

Fig. 9.39. Oscillazioni smorzate

La Fig. 9.39 mostra il grafico dell'oscillazione del punto medio della trave. È interessante notare che le oscillazioni si attenuano quasi totalmente nel giro di 3 s. Nella figura è possibile vedere chiaramente, oltre alle oscillazioni armoniche smorzate della trave, anche il grafico della funzione esponenziale e $x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi)$ che ne è l'involuppo.

Decremento logaritmico

Ricordando l'espressione delle vibrazioni libere di un sistema smorzato: $x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t + \phi)$.

(9.6.47)

In corrispondenza dei massimi dell'oscillazione l'argomento del coseno si annulla. Se si scrive il rapporto tra le ampiezze di due massimi successivi, le cui ascisse distano del periodo $2\pi/\omega_d$

$A_n = A_{n-1} e^{-\gamma T}$, si ottiene (vedi Fig. 9.39):

d

$x_n = A e^{-\gamma n T}$

$A_n = A e^{-\gamma n T}$

$2\pi/\omega_d$

$n A = A e^{-\gamma n T}$

$\approx 2\gamma =$.

x_{n+1}

$Ce^{-\gamma t} = F \sin(\omega t + \phi)$

e

$\ln(x_n)$

x_{n+1}

$1 - e^{-2\gamma T} =$

(9.6.48)

Dalla relazione precedente trae origine un sistema per la misura dello smorzamento interno dei materiali. Se infatti si fa oscillare liberamente il sistema e si calcola il decremento logaritmico si ottiene una misura affidabile dello smorzamento interno γ .

A titolo d'esempio l'ordine di grandezza di γ per le leghe metalliche va da 0,001 a 0,01, mentre per le materie plastiche ed i compositi l'ordine di grandezza è di 0,05.

Vibrazioni forzate nei sistemi ad un grado di libertà

Con riferimento all'oscillatore smorzato della Fig. 9.39, si cercherà di analizzare la risposta del sistema quando su esso agisce una forza variabile armonicamente. Scri-

 Image 7272

 Image 7273

 Image 7274

 Image 7275

 Image 7276

 Image 7277

 Image 7278

 Image 7279

 Image 7280

 Image 7281

 Image 7282

 Image 7283

 Image 7284

 Image 7285

 Image 7286

 Image 7287

 Image 7288

 Image 7289

 Image 7290

 Image 7291

 Image 7292

 Image 7293

 Image 7294

9.6 Piccole oscillazioni

vendo le equazioni del moto per una forzante armonica espressa in forma complessa si ha:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = F_0 e^{i\omega t}$$

(9.6.49)

m

l'integrale generale di questa equazione differenziale, non omogenea, a coefficienti costanti, si compone dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata, già calcolato in precedenza, più un integrale particolare dell'equazione completa. Il primo rappresenta un transitorio dovuto alle condizioni iniziali, in corrispondenza della prima applicazione del carico, il secondo rappresenta la soluzione a regime. Il transitorio si estingue rapidamente, come si è visto nel caso delle vibrazioni libere, mentre la risposta a regime permane, finché permane la forza eccitatrice. Si ha allora, limitandosi alla soluzione a regime, ancora una risposta del tipo $x = X e^{i\omega t}$ che, sostituita nell'equazione del moto, fornisce:

$$(-\omega^2 + i2\zeta\omega\omega_n + \omega_n^2) X e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$$

$$X e^{i\omega t} = \frac{F_0}{-\omega^2 + i2\zeta\omega\omega_n + \omega_n^2} e^{i\omega t}$$

(9.6.50)

m

Eliminando il fattore comune $e^{i\omega t}$ e quindi la dipendenza dal tempo si ha: F_0

F_0

$X =$

m

=

k

.

(9.6.51)

$$- F^2 + iF^2 = F_n + F^2$$

F²

F

n

1 -

+

F

i²=

2

F

n

n

Nell'equazione precedente si passa dalla seconda espressione alla terza, dividendo al numeratore e al denominatore per F²

=

n e ricordando che è m F²

n

k. L'ampiezza X è

quindi complessa, con modulo:

F

F

0

2= F

X

k

n

0 = #(

)

(

)

e fase

$\tan L = -$

.

(9.6.52)

2

2

F2

1 - F2

+ 2= F

1 -

F2

F

n

n

F2n

La risposta forzata è sfasata rispetto alla forzante dell'angolo L, e si può scrivere: $x = X_0 e^{-iL\omega t} = X_0 [\cos(\omega t - L) + i \sin(\omega t - L)]$.

(9.6.53)

Nell'espressione della risposta è possibile includere anche il transitorio ottenendo: $x = X_0 e^{-iL\omega t} = X_0 [\cos(\omega t - L) + i \sin(\omega t - L)] + e^{-\gamma t} [C \cos(\omega t) + E \sin(\omega t)]$. (9.6.54) Dove le costanti C e E devono essere determinate in base alle condizioni iniziali, mentre X0 e L dipendono dall'ampiezza della forza applicata e dallo smorzamento. Il transitorio ha in ogni caso una limitata importanza, perché nei sistemi con smorzamento, e tutti i sistemi reali lo sono, esso si estingue rapidamente.

Tornando all'espressione di X0 si può notare che il termine F0 / k non è altro che lo spostamento statico dell'oscillatore sotto una forza di ampiezza F0, applicata staticamente. Potremo quindi scrivere che:

$X_0 = X_0 =$

1

-

.

(9.6.55)

F

3

0

F2 2

F 2

k

1 -

+

F

2=

2

F

n

n

 Image 7295

 Image 7296

330

9 Dinamica

Fig. 9.40. Fattori di amplificazione in funzione della frequenza per un oscillatore semplice smorzato

L'ultimo termine rappresenta il cosiddetto fattore d'amplificazione, in altre parole il rapporto tra l'ampiezza dinamica dell'oscillazione e l'ampiezza statica. Questo rapporto, riportato in ascisse in funzione del quoziente F / F_n

tra la pulsazione della forza eccitatrice e la pulsazione naturale del sistema, è funzione anche dello smorzamento.

Nel diagramma in Fig. 9.40 l'ampiezza della risposta viene riportata per vari valori dello smorzamento del materiale. Nella zona corrispondente a rapporti F / F_n prossimi all'unità, si hanno effetti di forte amplificazione delle ampiezze rispetto ai valori statici, effetti tanto più rilevanti quanto minore è lo smorzamento.

Esempio 9.21. Alcuni organi interni del nostro corpo, ad esempio i visceri, sono so-stenuti da tessuti con comportamento viscoelastico. Per quanto si tratti di un approccio di prima approssimazione è quindi possibile, per valutare l'effetto delle vibrazioni a bassa frequenza sull'uomo, impiegare un modello del tipo visto precedentemente, con un'unica differenza. L'eccitazione non avviene in questo caso per l'applicazione di una forza alla massa inerziale, bensì per lo spostamento del vincolo.

Fig. 9.41. Eccitazione per spostamento del vincolo

 Image 7297

 Image 7298

 Image 7299

 Image 7300

 Image 7301

 Image 7302

 Image 7303

 Image 7304

 Image 7305

 Image 7306

9.6 Piccole oscillazioni

331

Poiché si suppone che, oltre alla massa, anche il vincolo si muova, dovremo introdurre nel modello una nuova coordinata ausiliaria z , che misura lo spostamento del vincolo. Supponendo allora che questo avvenga con legge armonica, si ha, dal diagramma di corpo libero della massa:

$$-k(x - z) - c(\dot{x} - \dot{z}) - m\ddot{x} = 0 \quad \text{con } z = z_0 e^{i\omega t}.$$

(9.6.56)

Sommando al primo e secondo membro l'espressione $m\ddot{z}$ e ponendo $y = x - z$ si ha: $m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = m\ddot{z} = m\omega^2 z_0 e^{i\omega t}$

in forma canonica

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n y + \omega_n^2 y = \omega_n^2 z_0 e^{i\omega t}.$$

n

$$z_0 e^{i\omega t}.$$

(9.6.57)

Il sistema conserva un grado di libertà, lo spostamento relativo tra la base e la massa oscillante e l'equazione del moto è ancora formalmente analoga a quella del sistema forzato mediante eccitazione sulla massa, ma la forzante ha un'espressione diversa.

La legge del moto è quindi:

&

,

$$y = y_0 e^{-iL\omega t} = y_0 \cos(\omega t - L) + i \sin(\omega t - L) \quad \text{con:}$$

(9.6.58)

F2

F z

2 0

ampiezza

y

n

0 = -

(9.6.59)

F2 2

F 2

1 -

+

F

2=

2

F

n

n

F

2= F

e fase

$$\tan L = -$$

n .

(9.6.60)

F2

$$1 - F2n$$

Il diagramma in Fig. 9.42 rappresenta il rapporto X_0 al variare di F / F_n

Z

n e =. È evidente

0

che per valori di F / F_n prossimi all'unità si hanno effetti di risonanza tanto maggiori quanto minore è lo smorzamento.

X_0

Z_0

Fig. 9.42. Risposta del-

l'oscillatore eccitato per

spostamento del vincolo

 Image 7307

 Image 7308

 Image 7309

 Image 7310

 Image 7311

 Image 7312

 Image 7313

 Image 7314

 Image 7315

 Image 7316

 Image 7317

 Image 7318

332

9 Dinamica

Esempio 9.22. Uno strumento di massa pari a 50 kg è sostenuto da 4 molle, ciascuna di rigidità pari a 7500 N/m. Se la base dello strumento viene fatta oscillare con moto armonico la cui legge sia $z_B = 0,002 \cos(50 t)$, determinare l'ampiezza a regime delle oscillazioni dello strumento. Si trascuri lo smorzamento.

Risposta. $x_0 = -0,00262$ mm.

Soluzione. Ricordando quanto detto a proposito dei sistemi eccitati per spostamento del vincolo, si ha:

F2

F z

2 0

y

n

0 = -

,

F2 2

F 2

1 -

+

F

2=

2

F

n

n

la pulsazione propria è:

#

F

4 * 7500

rad

n =

= 24 , 5

.

50

s

In assenza di smorzamento applicando la prima formula si ha:

$$502 * 0,002$$

$$24,52$$

$$y_0 =$$

$$= - 0,0026 \text{ m} .$$

$$1 - 502$$

$$24,52$$

Il segno meno indica che la vibrazione dello strumento avviene in opposizione di fase con quella della base.

Eccitazione non periodica

Le trasformate di Laplace forniscono una soluzione al problema di trovare la risposta di un qualunque sistema a eccitazioni di tipo periodico o non periodico: lo schema è il seguente:

INPUT $f(s)$

$H(s)$

$X(s)$

Fig. 9.43. Schema a blocchi di un sistema eccitato in modo generale
Scrivendo le equazioni del moto si ha:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) .$$

 Image 7319

 Image 7320

 Image 7321

 Image 7322

 Image 7323

 Image 7324

 Image 7325

 Image 7326

 Image 7327

 Image 7328

 Image 7329

 Image 7330

 Image 7331

 Image 7332

 Image 7333

 Image 7334

 Image 7335

 Image 7336

9.6 Piccole oscillazioni

333

Trasformando:

\$

%

\$

%

$$ms^2x(s) - s * x(0) - \dot{x}(0) + cs * x(s) - x(0) + kx(s) = F(s) (ms + c)x(0) + m\dot{x}(0)$$

$$x(s) =$$

$$F(s)$$

+

$$ms^2 + cs + k$$

$$ms^2 + cs + k$$

$$x(s) = A(s) = H(s) * F(s) + R(s) .$$

(9.6.61)

$$B(s)$$

Se si considera solo la soluzione a regime:

$$x(s) = A(s) = H(s) * F(s) .$$

$$B(s)$$

Esempio 9.23. Il problema di conoscere quale sia la severità dell'impatto che un corpo può sopportare senza subire danni è di grande interesse, per esempio nell'atterraggio degli aerei o nello studio degli imballaggi.

Discuteremo qualche aspetto elementare del problema, ricorrendo al nostro familiare modello a un g.d.l. Si consideri il sistema massa-molla della Fig. 9.44, lasciato cadere sul terreno dall'altezza h .

Se la coordinata x misura la posizione della massa a partire dall'istante $t = 0$ in cui l'estremità inferiore della molla tocca il terreno, l'equazione differenziale del moto, valida finché la molla resta a contatto col terreno è:

$$m\ddot{x} + kx = mg .$$

(9.6.62)

Prendendo la trasformata di Laplace di questa equazione con le condizioni iniziali

$\sqrt{}$

$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 2gh$ possiamo scrivere l'equazione trasformata come:

$\sqrt{}$

#

$2gh$

k

$x(s) =$

+

g

.

(9.6.63)

$s^2 + F^2$

) con $F_n =$

n

$s(s^2 + F^2n)$

m

Eseguendo la trasformazione inversa otteniamo per lo spostamento:

$\sqrt{}$

-

$2gh$

$2gh$

g

$x(t) =$

(

+

$F \sin Fnt + g (1 - \cos Fnt) =$

$\sin(Fnt - \theta) + g$

n

F^2

F^2

F^2

F^2

n

n

n

n

$x(t) > 0$.

Fig. 9.44. Eccitazione per spostamento del vincolo


 Image 7337

 Image 7338

 Image 7339

 Image 7340

 Image 7341

 Image 7342

 Image 7343

 Image 7344

 Image 7345

 Image 7346

 Image 7347

 Image 7348

 Image 7349

334

9 Dinamica

Derivando si ottiene:

-

-

2gh

g

2gh

g

$$\dot{x}(t) = F_n$$

+

+

F

cos(F

sin(F

2

F2

nt - ()

$$\ddot{x}(t) = - F2n$$

F2

F2

nt - () .

n

n

n

n

(9.6.64)

Possiamo vedere agevolmente che la deflessione statica della molla è $3st = g$ e che $F2n$

il massimo valore della velocità e dell'accelerazione si hanno quando il seno o il coseno assumono valori unitari. Quindi troviamo che il valore massimo del rapporto tra l'accelerazione massima e quella di gravità dipende soltanto dal rapporto tra l'altezza di caduta e la deflessione statica della molla:

#

$$\ddot{x} = -2h + 1 .$$

(9.6.65)

g

$3st$

Considerando ad esempio una persona alla guida di un'auto in posizione seduta, per studi forensi il modello ad un g.d.l. viene spesso considerato valido. Assumendo, sulla base di dati sperimentali presenti in letteratura che la rigidità della spina dorsale sia pari a $k = 81000 \text{ N/m}$, ed un peso del corpo di 700 N , la deflessione statica risulta $3st = 700 / 81000 = 0,00864 \text{ m}$. Facciamo l'ipotesi che il conducente, non trattenuto dalle cinture, si lancia verso l'alto per 30 cm e ricada su un sedile stazionario, non imbottito. La massima accelerazione subita dalla persona si ricava applicando la formula precedente:

-

$$\ddot{x} = -2 * 0,1 + 1 = 4,91 .$$

g

Effetti delle vibrazioni sul corpo umano

Studi modellistici e sperimentali hanno mostrato che le vibrazioni producono effetti dannosi sul corpo nostro corpo. Nella medicina del lavoro esistono protocolli per il monitoraggio delle vibrazioni *mano-braccio*, indotte dall'uso di utensili a percussione o rotanti, che trasmettono forze dinamiche al braccio e alla mano dell'operatore.

Le norme in materia fissano limiti per l'esposizione a questo tipo di vibrazioni negli ambienti di lavoro, per tutelare il benessere del lavoratore e l'insorgere di danni fisiologici temporanei o permanenti. Un altro caso importante è quello delle vibrazioni *all-body* quelle cioè che assoggettano l'intero corpo a oscillazioni indesiderate.

Il problema si presenta per i conducenti di mezzi di trasporto o macchine operatrici, con alti livelli di vibrazione. Il campo di frequenze potenzialmente dannose è più alto nelle vibrazioni *mano-braccio*, in quanto effetti di risonanza si verificano a frequenze più elevate. In alcuni casi viene colpita la circolazione nelle zone periferiche, con la conosciutissima sindrome del dito bianco, tipica degli operatori che impiegano utensili a percussione o rotanti. Lo studio di questi problemi va oltre i limiti di questo testo. Ci limiteremo ad una breve esposizione delle problematiche.

In conseguenza dello sviluppo tecnologico, il numero e la tipologia delle attività lavorative, i cui addetti possono essere considerati esposti alle vibrazioni dell'intero corpo o del sistema *mano braccio*, hanno subito un considerevole aumento. Ad esempio in agricoltura, dove sono impiegate macchine delle più svariate dimensioni

9.6 Piccole oscillazioni

335

in molteplici condizioni d'impiego, nelle operazioni di scavo e di movimentazione di materiali inerti, in edilizia civile o nella cantieristica, nell'industria estrattiva, sia in sotterraneo che a cielo aperto, nell'industria forestale, nella movimentazione di merci o macchinari mediante carrelli e in

tutto il settore dei trasporti. Gli utensili manuali, alimentati ad aria compressa, con l'elettricità, o dotati di motori a combustione interna, sono sempre più diffusi nei più svariati settori produttivi, quali l'industria metalmeccanica, le carpenterie d'ogni tipo, e l'industria del legno. In questi settori, e in numerosi altri, è presente, a diverso livello, l'esposizione occupazionale a vibrazioni meccaniche [83]. È stato stimato che una frazione tra il 4% e il 7% della forza lavoro in Gran Bretagna, USA, e Canada, è potenzialmente esposta a vibrazioni trasmesse a tutto il corpo di elevata intensità [71].

Vibrazioni in ambiente di lavoro

Il corpo umano è, dal punto di vista meccanico, un sistema di particolare complessità perché composto da una serie di sottoinsiemi con proprietà differenti. Ciascun organo o apparato ha massa, caratteristiche elastiche e smorzamento diversi. Durante esposizioni a vibrazioni con uno spettro distribuito nell'intervallo tra 1 e 80 Hertz, i diversi organi possono essere soggetti a sollecitazioni differenziate e compiere spostamenti relativi di notevole ampiezza. Per esempio, la frequenza di risonanza degli organi addominali è di 4–8 Hertz, delle spalle di 4–5 Hertz, della testa di 20–30 Hertz, delle gambe, secondo l'angolazione, di 2–20 Hertz.

Per sollecitazioni di frequenza inferiore a 2 Hertz, l'organismo si comporta come una massa unica, seguendo in modo omogeneo gli spostamenti della struttura vibrante con cui è a contatto. Le vibrazioni a frequenza superiore a 80 Hertz, invece, coinvolgono la zona prossima all'area di eccitazione. Le proprietà d'attenuazione degli strati immediatamente sottostanti provocano un rapido smorzamento della sollecitazione, che non si propaga in profondità nell'organismo. La risposta dipende anche dalla direzione della vibrazione. La sollecitazione verticale, che si trasmette dalla zona d'appoggio verso il capo per i soggetti in posizione eretta o seduta, provoca risposte differenti rispetto a quelle generate da una sollecitazione che agisce sul piano orizzontale. Un altro elemento di complessità è rappresentato dai movimenti oscillanti di rotazione attorno a una o più direzioni, beccheggio e rollio, comuni sui mezzi di trasporto sull'acqua, ma da non trascurare sui mezzi di movimento terra e di uso agricolo [21].

L'esposizione prolungata alle vibrazioni è associata ad alterazioni dell'apparato muscolo scheletrico, vascolare periferico, nervoso centrale e periferico, e condiziona negativamente il comfort, l'efficienza, la salute e il benessere dei lavoratori. In particolare, disturbi dell'equilibrio possono essere indotti da vibrazioni di frequenza compresa tra 1 e 15–18 Hertz, mentre la colonna vertebrale appare come la struttura più frequentemente danneggiata, soprattutto nella zona lombare, seguita dalla regione dorsale e da quella cervicale. Vari studi epidemiologici hanno dimostrato che i conducenti e gli operatori di macchinari mobili sono più soggetti allo sviluppo di lombalgie, lombosciatalgie, alterazioni degenerative della colonna vertebrale (spondiloartrosi, spondilosi, osteocondrosi intervertebrale), discopatie e ernie discali

336

9 Dinamica

lombari e/o lombosacrali, prima di altre categorie di lavoratori [65, 66]. Vibrazioni di frequenza compresa tra 20 e 40 Hertz possono indurre riduzione dell'acuità visiva, della fotosensibilità retinica, e restringimento del campo visivo [65]; è intuitiva la rilevanza di tale problema, ai fini della propria e altrui sicurezza, per i conduttori di mezzi meccanici o gli autisti di mezzi pubblici [65–67]. Studi di biodinamica hanno evidenziato i seguenti possibili meccanismi attraverso i quali le vibrazioni possono indurre lesioni all'apparato muscolo-scheletrico del rachide [21]:

-

sovraccarico meccanico dovuto a fenomeni di risonanza della colonna vertebrale nell'intervallo di frequenza delle vibrazioni tra 3 e 10 Hertz, con conseguente danno strutturale a carico dei corpi vertebrali, dischi e articolazioni intervertebrali;

-

eccessiva risposta contrattile dei muscoli paravertebrali causata da intenso stimolo vibratorio, con conseguenti fenomeni di affaticamento muscolare.

La sensibilità dei soggetti esposti sarebbe massima per vibrazioni di frequenza compresa tra 1 e 2 Hertz, nelle direzioni disposte sul piano orizzontale, e tra 4 e 8 Hertz nella direzione dai piedi al capo, usualmente coincidente con la verticale [45].

La normativa di riferimento per la valutazione dei rischi connessi alle vibrazioni trasmesse a tutto il corpo è lo Standard Internazionale ISO 2631-1 del 1997 “Mechanical vibration and shock – evaluation of human exposure to whole body vibration” [59]. Lo standard contiene indicazioni relative a tre aspetti legati agli effetti della vibrazione dell’intero corpo:

- conservazione dello stato di salute;
- comfort e percezione;
- cinetosi.

Gli effetti sulla salute, che l’applicazione dello standard intende prevenire e controllare, sono le manifestazioni dolorose e degenerative a carico del tratto lombare del rachide e del sistema nervoso collegato. Per quanto riguarda la conservazione dello stato di salute, il documento ISO rileva chiaramente che le indicazioni si riferiscono a vibrazioni comprese nell’intervallo di frequenza da 0,5 a 80 Hertz.

L’indicazione delle vibrazioni meccaniche quale fattore di rischio occupazionale da parte dell’International Labor Office (ILO) risale al 1977, quando fu elaborata la raccomandazione sull’opportunità che:

... si prendano misure per proteggere i lavoratori dalle vibrazioni ... [le] autorità responsabili devono stabilire i criteri per determinare il pericolo; quando necessario, si devono definire limiti di esposizione sulla base di tali criteri. Il controllo dei lavoratori esposti al rischio occupazionale derivante dalle vibrazioni presenti sul posto di lavoro deve includere il controllo

medico, sia prima dell'inizio dell'attività lavorativa, che i successivi controlli periodici [58].

Il Parlamento Europeo e il Consiglio dell'Unione Europea, con la Direttiva 2002/44/

CE del 25 giugno 2002 sulle prescrizioni minime di sicurezza e di salute relative all'esposizione dei lavoratori ai rischi derivanti dagli agenti fisici (Vibrazioni), hanno riconosciuto la necessità d'introdurre misure di protezione dei lavoratori contro

9.6 Piccole oscillazioni

337

i rischi derivanti dalle vibrazioni, a causa degli effetti di queste sulla salute e sulla sicurezza, segnatamente i disturbi muscolo scheletrici, neurologici e vascolari” [23].

Sebbene esista un consenso diffuso e indiscusso nell'individuare le vibrazioni meccaniche come fattore di rischio lavorativo, la molteplicità degli effetti a esse riconducibili, la complessità dei modi di presentazione del fenomeno, quali la grandezza vettoriale (per cui è necessario indagare gli effetti per le tre componenti lungo le direzioni di un sistema di riferimento ortogonale), la variabilità della frequenza in relazione al particolare tipo di sorgente, e la marcata variabilità nel tempo, fanno sì che le indicazioni contenute nei principali documenti normativi [59, 60] possano essere considerate, in termini rigorosi, solo dei documenti indicativi. Infatti, gli stessi documenti denunciano l'esistenza e l'importanza delle problematiche sulla salute, l'efficienza lavorativa o il comfort dell'esposizione alle vibrazioni meccaniche, ma, al tempo stesso, riconoscono l'impossibilità di definire limiti di esposizione, il cui rispetto sia garanzia della salute e della sicurezza del lavoratore.

In un limitato numero di Stati membri dell'Unione Europea (Belgio, Francia, Germania, Olanda), alcune patologie del rachide, sono considerate di origine professionale e come tali suscettibili di indennizzo [69]. Tuttavia, i sintomi muscolo-scheletrici e le lesioni al rachide lombare rappresentano

un complesso di alterazioni di origine multifattoriale nella cui eziopatogenesi intervengono fattori di natura sia occupazionale sia extra-occupazionale [21, 66, 83]. Ne deriva che è molto difficile separare il contributo delle vibrazioni da quello di altri fattori di rischio individuale ed ergonomico nell'insorgenza e/o aggravamento di disturbi del rachide.

Sistemi a parametri concentrati, due o più gradi di libertà

Non sempre è possibile ricondurre il sistema analizzato ad un modello con un solo grado di libertà, come quello studiato nelle pagine precedenti. Nel mondo fisico abbiamo a che fare normalmente con sistemi continui, che vengono ricondotti spesso a modelli a parametri concentrati costituiti da masse collegate da molle e smorzatori.

Il passaggio da un sistema continuo ad un modello discreto è oggetto di studio da parte dei testi specialistici sulle vibrazioni e non verrà da noi trattato. Diremo semplicemente che la scelta dei parametri d'inerzia, d'elasticità e di smorzamento segue il principio di avere nel modello, sottoposto alle stesse condizioni d'eccitazione del sistema reale, una risposta vibratoria quanto più possibile vicina a quella del sistema reale. Un sistema a più gradi di libertà presenta tante frequenze naturali quanti sono i gradi di libertà, corrispondenti ad altrettanti modi normali di vibrare. In termini matematici i modi e le pulsazioni naturali corrispondenti sono conosciuti come autovalori ed autovettori del sistema, o, per meglio dire, del modello che rappresenta il sistema. I modi normali di vibrare sono vibrazioni libere non smorzate che dipendono dai parametri di rigidità e massa del sistema. Quando il sistema vibra in uno dei suoi modi normali tutti i suoi punti oscillano secondo moti armonici, passando attraverso la posizione d'equilibrio simultaneamente. Per eccitare un sistema a vibrare in uno dei suoi modi normali, occorre avere particolari condizioni iniziali del moto, corrispondenti al modo in esame. Per condizioni iniziali più generali, come un'eccitazione impulsiva, è possibile che tutti i modi del sistema siano eccitati contemporaneamente-

 Image 7350

9 Dinamica

Fig. 9.45. Un sistema a due

gradi di libertà. In basso i dia-

grammi di corpo libero delle

due masse

te. Come nel caso dei sistemi ad un solo g.d.l., le vibrazioni forzate di sistemi a più g.d.l. avvengono alla frequenza delle forze eccitatrici. Quando la frequenza delle forze eccitatrici è uguale ad una delle frequenze proprie, si verifica una condizione di risonanza e in questo caso le ampiezze d'oscillazione assumono valori molto elevati, che solo la presenza dello smorzamento può limitare. Nella nostra analisi, limitata allo studio delle vibrazioni libere di un sistema a 2 g.d.l., il sistema sarà considerato privo di smorzamento.

La Fig. 9.45 mostra un particolare sistema a due g.d.l. Le coordinate x_1 e x_2 sono misurate a partire dalla posizione iniziale delle singole masse. Nella parte inferiore della figura sono mostrati i diagrammi di corpo libero delle due masse. Il verso positivo delle forze è verso destra.

Applicando il secondo principio alle due masse si ottiene:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$2m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2 .$$

(9.6.66)

Le due masse compiono oscillazioni armoniche con la stessa frequenza, passando per la posizione d'equilibrio nello stesso istante. Possiamo scrivere quindi: $x_1 = A_1 \sin(Ft)$ o $A_1 e^{iFt}$

$$x_2 = A_2 \sin(Ft) \text{ o } A_2 e^{iFt} .$$

(9.6.67)

Sostituendo nella (9.6.65) ed eliminando i termini dipendenti dal tempo, otteniamo in termini di ampiezze di oscillazione:

$$(2k - F^2m)A_1 - kA_2 = 0$$

$$-kA_1 + (2k - 2F^2m)A_2 = 0.$$

(9.6.68)

Che, scritta in modo matriciale diventa:

!!

!

! (2k - F²m)

- k

!

(2k - F²m)

- k

A₁

!

!

-

= 0.

k

(2k - 2F²m) ! = 0

- k

$$(2k - 2F2m)$$

A2

(9.6.69)

Il sistema scritto può avere una soluzione non nulla soltanto se il determinante dei coefficienti è nullo:

!!

!

$$! (2k - F2m)$$

- k

!

!

!

- k

$$(2k - 2F2m) ! = 0 .$$

(9.6.70)

 Image 7351

 Image 7352

 Image 7353

 Image 7354

 Image 7355

 Image 7356



 Image 7357

 Image 7358

 Image 7359


 Image 7360

 Image 7361

 Image 7362

 Image 7363

 Image 7364

 Image 7365

 Image 7366

 Image 7367

 Image 7368

 Image 7369

 Image 7370

 Image 7371

 Image 7372

 Image 7373

 Image 7374

 Image 7375

 Image 7376

 Image 7377

 Image 7378

 Image 7379

 Image 7380

9.6 Piccole oscillazioni

339

Ponendo $\omega = F2$ e sviluppando il determinante si ottiene:

2

$2 - 3 : + 3 k$

$= 0 .$

(9.6.71)

k

2

m

Le due radici ω_1, ω_2 e le pulsazioni naturali corrispondenti F_1, F_2 sono:

$\sqrt{\quad}$

$\sqrt{\quad}$

:

3

k

k

3

k

k

1 =

- 1 3

= 0 , 634

:2 =

+ 1 3

= 2 , 366

2

2

m

m

2

2

m

m

#

#

F

k

k

1 =

:1 = 0,634

F2 = :2 = 2,366.

(9.6.72)

m

m

Dalla (9.6.62) troviamo due espressioni per il rapporto delle ampiezze: $A1 =$

k

= $2k - 2F2m$.

(9.6.73)

A2

$2k - F2m$

k

La sostituzione dei valori delle pulsazioni naturali nell'una o nell'altra espressione porta a due distinti valori del rapporto tra le ampiezze.

Per $F2 = 0,634 k$ otteniamo:

1

m

A

1

1

=

k

=

1

= 0,731 .

A2

2k - F2m

2 - 0,634

1

Per F2 = 2,366 k si ha:

2

m

A

2

1

=

k

=

1

= - 2 , 73 .

A2

2k - F2m

2 - 2 , 366

2

L'equazione (9.6.67) ci permette di trovare soltanto il rapporto tra le due ampiezze e non i loro valori assoluti che sono arbitrari. Se una delle ampiezze è fissata ad esempio uguale ad 1 si dice che le ampiezze sono normalizzate all'unità. I vettori delle ampiezze normalizzate prendono il nome di modi normali e vengono usualmente indicati come $L_1(x)$. I due modi normali dell'esempio svolto, che ora possiamo chiamare autovalori del sistema sono rispettivamente:

L

0 , 731

- 2 , 73

$L_1(x) =$

L

.

1

$L_2(x) =$

1

Ogni modo normale d'oscillazione può essere scritto, reintroducendo la funzione di dipendenza dal tempo:

1

x1

=

0,731

A

sin(F

x

1

1t + E1)

2

1

2

x1

=

- 2,73

A

sin(F

x

2

$2t + E2) .$

(9.6.74)

2

1

La forma dei modi normali è rappresentata nella Fig. 9.46.

 Image 7381

340

9 Dinamica

1

0,731

1

k

2

$\omega = 0,634$

k

1

-2,73

2

m

$\omega = 2,366$

2

m

Fig. 9.46. Modi normali del sistema a 2 g.d.l della Fig. 9.45

Fig. 9.47. Un modello del corpo umano

Concludiamo l'esposizione sulle piccole oscillazioni riportando un modello, scelto tra i numerosi presenti nella letteratura scientifica, che rappresenta il corpo umano in piedi. La molla inferiore rappresenta l'elasticità delle due gambe, in serie con le articolazioni (k_3 , c_3) che presentano elasticità e smorzamento. La massa m_3 rappresenta le gambe ed il bacino. Su questo insistono elasticamente gli organi interni da una lato e la colonna vertebrale col tronco dall'altro. Questa è rappresentata con una molla k^* in serie con un sistema massa molla (k

2

2 , c_2) che rappresenta il comportamento

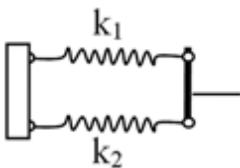
elastico-dissipativo del rachide. La massa m_2 rappresenta il tronco e la colonna. Al

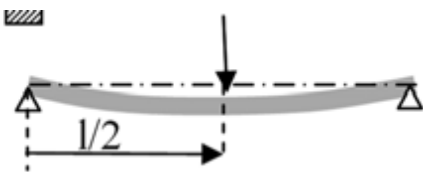
 Image 7382

 Image 7383

 Image 7384

 Image 7385





9.7 Rigidezza di alcuni elementi strutturali

341

disopra di questa è il capo, collegato elasticamente attraverso un elemento elastico principale k_2 , in serie con un sistema molla-smorzatore che rappresenta le caratteristiche elastico dissipative del collo. Modelli di questo tipo vengono impiegati nella ricerca, dopo accurata calibrazione, basata su dati sperimentali. I vantaggi principali risiedono nella facilità del calcolo della risposta a eccitazioni di vario tipo, periodiche, transienti e impulsive. Modelli più raffinati, anche se sempre legati a una messa a punto e calcoli più laboriosi, sono quelli basati su metodi FEM, piuttosto popolari dopo il formidabile sviluppo della potenza di calcolo degli elaboratori digitali.

9.7 Rigidezza di alcuni elementi strutturali

1

Molle in serie

$= 1 + 1$

K

k_1

k_2

Molle in parallelo $K = k_1 + k_2$

Asta in trazione $k = F = EA$

$!l$

l

Asta in torsione $k = GJp$

l

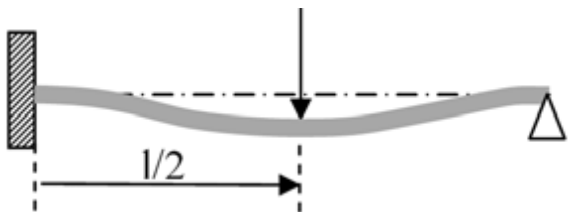
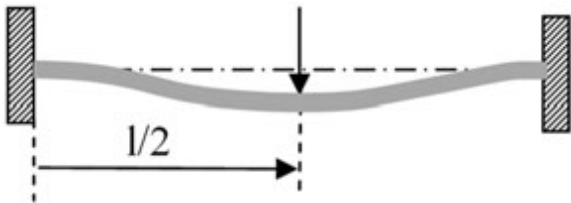
Trave a mensola $k = F = 3EJ$

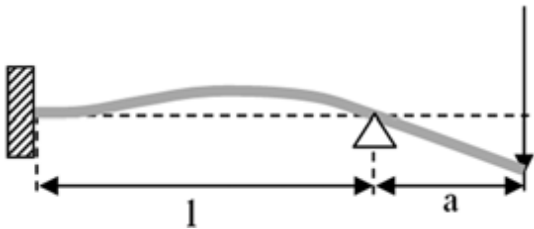
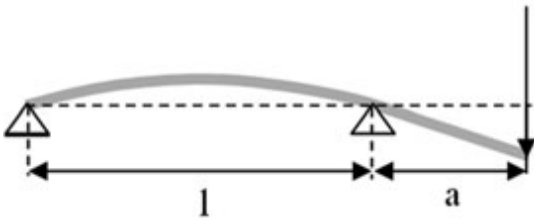
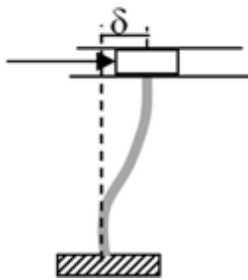
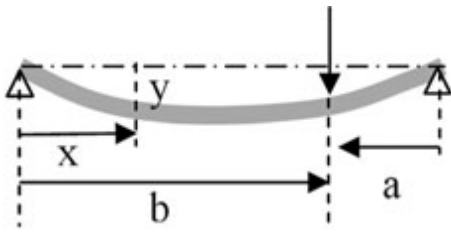
$!l$

l^3

Trave appoggiata rigidità mezzaria $k = 48EJ$

l^3





342

9 Dinamica

Trave incastrata rigidezza in mezzeria $k = 192EJ$

13

Trave incastro-appoggio in mezzeria $k = 768EJ$

713

$$k = 3EJ$$

Trave appoggiata

$$y_x = Pbx (l^2 - x^2 - b^2)$$

$$a^2b^2$$

$$6EJ$$

Trave con spostamento senza rotazione $k = 12EJ$

$$l^3$$

Trave a sbalzo

$$k =$$

$$24EJ$$

$$a^2(3l + 8a)$$

$$k =$$

$$3EJ$$

$$(l + a) * a^2$$

Bibliografia

[1]

Agus M., Giachetti A., Gobbetti E., Zanetti G., Zorcolo A., Picasso B.: A Haptic model of a bone cutting burr. Medicine Meets Virtual Reality – MMVR-03 (2003).

[2]

Alexander R.M.: Locomotion of animals. Tertiary level biology. Blackie, Glasgow – New York; distributed in the USA by Chapman and Hall (1982).

[3]

Alexander R.M.: Principles of animal locomotion. Princeton University Press, Princeton NJ (2003).

[4]

Alexander R.M., Goldspink G.: Mechanics and energetics of animal locomotion. Chapman and Hall, London New York; distributed by Halsted Press (1997).

[5]

McNeill A.R.: Mechanics of animal movement. *Current Biology* **15**(16), 616–619 (2005).

[6]

Baldi A., Casu F., Masala F., Gerovasi L., Picasso B.: A PZT actuated robotic gripper for biomedical applications. Proc. RAAD 2002, Cassino, Italy (2002).

[7]

American Society of Mechanical Engineers. Winter Meeting. Biomechanics in sport.

A 1987 update: presented at the Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, Boston, December 13–18 1987. ASME, New York (1987).

[8]

Bartel D.L., Davy D.T., Keaveny T.M.: Orthopaedic biomechanics: mechanics and design in musculoskeletal systems. Pearson/Prentice Hall, Upper Saddle River NJ (2006).

[9]

Bartlett R.H. et al.: Mechanical devices for cardiopulmonary assistance. Advances in cardiology. Karger, Basel New York (1971).

[10] Baruh H.: Analytical dynamics. WCB/McGraw-Hill, Boston (1999).

[11] Bartlett R.: Introduction to sports biomechanics. 1 ed. Routledge, New York (1997).

[12] Basmajian J.V, DeLuca C.J.: Muscles Alive: Their Functions Revealed. 5 ed. Williams

& Wilkins Publ., New York (1985).

[13] Bassini C.: Principi di meccanomorfosi e di biomeccanica nella genesi e nel trattamento dei paramorfismi. Cooperativa libraria universitaria, Bologna (1972).

[14] Bell A.G., Adler C.: Aerial locomotion. The Academy, Washington (1907).

[15] Bels V.L., Gasc J.P., Casinos A.: Vertebrate biomechanics and evolution. Experimental biology reviews. BIOS Scientific, Oxford (2003).

[16] Blazeovich A.: Sport Biomechanics. The basics. 2 ed. A&C Black Publishers Ltd., London (2007).

[17] Bishop R.E.D.: Vibration. Cambridge University Press, Cambridge (1965).

[18] Bishop R.E.D., Gladwell G.M.L., Michaelson S.: The matrix analysis of vibration.

Cambridge University Press, Cambridge (1965).

344

Bibliografia

[19] Bishop R.E.D., Johnson D.C.: The mechanics of vibration. Cambridge University Press, Cambridge (1979).

[20] Bronzino J.D.: The biomedical engineering handbook. 3 ed. CRC/Taylor & Francis, Boca Raton (2006).

[21] Casula D., Benvenuto F., Atzeri S.: Elementi di igiene del Lavoro. In: Casula D.: Medicina del Lavoro, 3a ed. Monduzzi Editore, Bologna (2003).

[22] Chien S., Chen P.C.Y., Fung Y.C.: An introductory text to bioengineering. World Scientific, Singapore (2008).

[23] Comunità Economica Europea. Direttiva 2002/44/CE sulle prescrizioni minime di sicurezza e salute relative all'esposizione dei lavoratori ai rischi derivanti dagli agenti fisici (vibrazioni), 25 giugno 2002.

[24] Cotterill R.: Biophysics: an introduction. Wiley, New York (2002).

[25] Cowin S.C.: Bone Mechanics Handbook. CRC Press, Boca Raton FL (2001).

[26] Craig J.J.: Introduction to robotics: mechanics and control. 3 ed. Pearson/Prentice Hall, Upper Saddle River NJ (2005).

[27] Denavit J., Hartenberg R.S.: A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. Trans ASME J. Appl. Mech **23**: 215–221 (1955).

[28] Denavit J., Hartenberg R.S.: Kinematic synthesis of linkages. McGraw-Hill, New York (1964).

[29] Enderle J.D., Bronzino J.D., Blanchard S.M.: Introduction to biomedical engineering.

2nd ed. Elsevier-Academic Press, Amsterdam – Boston (2005).

[30] Frankel V.H., Nordin M.: Basic biomechanics of the skeletal system. Lea & Febiger, Philadelphia (1980).

- [31] Funaioli E.: Corso di meccanica applicata alle macchine. Pàtron, Bologna (1970).
- [32] Fung Y.C.: Biomechanics: mechanical properties of living tissues. Springer, New York (1981).
- [33] Fung Y.C.: Biomechanics: motion, flow, stress, and growth. Springer, New York (1990).
- [34] Fung Y.C.: Biomechanics: mechanical properties of living tissues. 2 ed. Springer, New York (1993).
- [35] Fung Y.C.: Biomechanics: circulation. 2 ed. Springer, New York (1997).
- [36] Fung Y.C.: Selected works on biomechanics and aeroelasticity. Advanced series in biomechanics. World Scientific, Singapore (1997).
- [37] Fung Y.C. and American Society of Mechanical Engineers. Applied Mechanics Division., Biomechanics; proceedings of a symposium sponsored by the Applied Mechanics Division of the ASME, at the annual meeting, November 30 1966, New York. American Society of Mechanical Engineers, New York (1966).
- [38] Fung Y.C., Chien S.: Introduction to bioengineering. World Scientific, Singapore (2001).
- [39] Fung Y.C. et al.: Biomechanics in China, Japan, and USA: proceedings of an international conference in Wuhan, China. Science Press, Beijing (1984).
- [40] Fung Y.C. et al.: Biomechanics, its foundations and objectives. Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ (1972).
- [41] Fung Y.C. et al.: Frontiers in biomechanics. Springer, New York (1986).
- [42] Galletti P.M., De Rossi D.E., De Reggi A.S.: Medical applications of piezoelectric po-lymers. Ferroelectricity and related phenomena. Gordon and Breach Science Publishers, New York (1988).

[43] Gordon A., Huxley A.F., Julian F.J.: The variation in isometric tension with sarcomere length in vertebrate muscle fibers. *J. Physiology* **185**, 170–192 (1966).

[44] Gray H., Williams P.L. et al.: *Gray's anatomy: the anatomical basis of medicine and surgery*. Churchill Livingstone, New York (1995).

Bibliografia

345

[45] Griffin M.J.: *Handbook of human vibration*. Academic Press, London (1990).

[46] Gurtin M: *An Introduction to continuum mechanics*. Elsevier, San Diego (2003).

[47] Hall S.J.: *Basic Biomechanics*. McGraw-Hill, Boston (1999).

[48] Hamill J., Knutzen K.: *Biomechanical basis of human movement*. 2 ed. Lippincott Williams & Wilkins, Philadelphia (2003).

[49] Hannah J., Hillier M.J.: *Applied mechanics*. Pitman, London (1962).

[50] Hannah J., Stephens R.C.: *Mechanics of machines: elementary theory and examples*. 3

ed. E. Arnold, London (1970).

[51] Hannah J., Stephens R.C.: *Mechanics of machines, advanced theory and examples*. 2 ed.

E. Arnold, London (1972).

[52] Hannah J., Stephens R.C.: *Mechanics of machines: elementary theory and examples*. 4

ed. E. Arnold, London (1984).

[53] Hatze H.: The meaning of the term biomechanics. *J. Biomechanics* **7**, 189–190 (1974).

[54] Harris C.M., Crede C.E.: *Shock and vibration handbook*. 2 ed. McGraw-Hill, New York (1976).

[55] Hay J.G: *The Biomechanics of Sport Techniques*. Prentice Hall, Upper Saddle River NJ

(1993).

[56] Hill A.V.: The Heat of Shortening and the Dynamic Constants of Muscle. *Proc. Roy. Soc.*

126(B), 136–195 (1938).

[57] Humphrey J.D. (ed.): *Continuum biomechanics of soft biological tissues*. *Proceedings of the Royal Society of London A* **459**, 3–46 (2003).

[58] International Labour Office. *Working Environment (air pollution, noise, vibration) Re-commendation R156*, 1977.

[59] International Standards Organization: *ISO 2631-1. Mechanical vibration and shock –*

Evaluation of human exposure to whole body vibration. Geneva (1997).

[60] International Standards Organization: *ISO 5349 Mechanical Vibration – Measurement and evaluation of human exposure to hand transmitted vibration. Part 1: General requirements*. Geneva (2001).

[61] Kalnins A., Dym C.L.: *Vibration: beams, plates, and shells. Benchmark papers in acoustics*. Dowden/Halsted Press, New York (1976).

[62] Lazan B.J.: *Damping of materials and members in structural mechanics*. 1 ed. Pergamon Press, Oxford NY (1968).

[63] Mason S.: *A History of the Sciences*. Collier Books, New York (1962).

[64] Martin R.B.: A Genealogy of Biomechanics. 23rd Annual Conference of the American Society of Biomechanics. Retrieved 13 October 2010 (1999).

[65] Meloni M.: Clinica delle malattie da vibrazioni meccaniche in ambito lavorativo. Internet: <http://www.cantieri-sicurezza.it/>

[66] Meloni M.: Patologie da vibrazioni meccaniche. Internet: <http://www.cantieri-sicurezza.it/>

[67] Meloni M., Casula D.: Malattie da vibrazioni meccaniche. In: Casula D.: Medicina del Lavoro, 3a ed. Monduzzi Editore, Bologna (2003).

[68] Meriam J.L., Kraige L.G: Engineering Mechanics Dynamics. 4 ed. Wiley, New York (1998).

[69] Nachemson A.L.: Spinal disorders: overall impact on society and the need for orthopaedic resources. *Acta Orthop. Scand.* **62** (suppl. 241): 17–22 (1991).

[70] Niklas K.J.: Plant Biomechanics: An Engineering Approach to Plant Form and Function.

1 ed. University of Chicago Press, New York (1992).

[71] Palmer K.T., Griffin M.J., Bendall H., Pannett B., Coggon D.: Prevalence and pattern of occupational exposure to hand transmitted vibration in Great Britain: findings from a national survey. *Occup. Environ. Med.* **57**: 18–28 (2000).

346

Bibliografia

[72] Park J.B., Bronzino J.D.: Biomaterials: principles and applications. CRC Press, Boca Raton (2002).

[73] Pau M., Corona F., Leban B., Pau M.: Effects of backpack carriage on foot-ground relationship in children during upright stance. *Gait & Posture*

33, 195–199 (2011).

[74] Pau M., Pau M.: Postural sway modifications induced by backpack carriage in primary school children: a case study in Italy. *Ergonomics* 53(7), 872–881 (2010).

[75] Pauwels F.: *Biomechanics of the locomotor apparatus*. Springer, Heidelberg Berlin (1980).

[76] Perry J., Burnfield J.M.: *Gait analysis: normal and pathological function*. 2 ed. Slack, Thorofare NJ (2010).

[77] Picasso B.: Fish and ships: Can Fish inspired Propulsion outperform traditional Pro-peller based Systems? Proc. DARPA-ONRIFO Workshop on Electroactive Polymers.

Il Ciocco, Lucca (2001).

[78] Picasso B.: Modeling the mechanics of fish propulsion – BAM First World Congress on Biomimetics and Artificial Muscles, Albuquerque NM (2002).

[79] Pipino F., Quagliarella L.: *Biomeccanica Ortopedica e Traumatologica*. UTET, Torino (1995).

[80] Raparelli T., Zobel Beomonte P.: *Ricerca applicata e formazione nella bioingegneria*.

Dimeg Università dell'Aquila (2007).

[81] Sayers C.: *Remote control robotics*. Springer, New York (1998).

[82] Stein J.L. et al.: *Biomechanics of normal and prosthetic gait*. ASME, New York (1987).

[83] Taylor W.A., Wasserman D.E.: Occupational vibration. In: Zenz C., Dickerson O.B., Horvath E.P. Jr: *Occupational Medicine*. 3a ed. St Louis, MO: Mosby – Year Book Inc.

(1994).

[84] Thomson W.T., Dahleh M.D.: Theory of vibration with applications. 5 ed. Prentice Hall, Upper Saddle River NJ (1998).

[85] Totten G., Liang H.: Mechanical tribology. Marcel Dekker, New York (2003).

[86] West J.B.: Respiratory physiology: the essentials. 9 ed. Wolters Kluwer Health/Lippincott Williams & Wilkins, Philadelphia (2012).

[87] Wiktorin C.v.H., Nordin M.: Introduction to problem solving in biomechanics. Lea & Febiger, Philadelphia (1986).

[88] Williams M., Lissner H.R.: Biomechanics of human motion. Saunders, Philadelphia (1962).

[89] Williams M., Lissner H.R., LeVeau B.F.: Williams and Lissner Biomechanics of human motion. 2 ed. Saunders, Philadelphia (1977).

[90] Winter D.A.: Biomechanics of human movement. Biomedical engineering and health systems. Wiley, New York (1979).

[91] Winter D.A.: Biomechanics IX. International series on biomechanics. Human Kinetics Publishers, Champaign IL (1985).

[92] Winter D.A.: Biomechanics and motor control of human movement. 3 ed. Wiley, Hoboken NJ (2005).

[93] Young D.F., Munson B.R., Okiishi T.H.: A Brief Introduction to Fluid Mechanics. Wiley, New York (2003).

[94] Zamparo P., Pendergast D.R., Termin A., Minetti A.E.: Economy and efficiency of swimming at the surface with fins of different size and stiffness. *European J. Applied Physiology* **96**(4), 459–470 (1996).

Indice analitico

abduzione e adduzione, 93

– diartrosi, 83

accelerazione

– gleno-omeroale, 21

– di Coriolis, 140, 141, 143

– gomito, 242

acetabolo, 85

– intervertebrale, 23

algoritmo

– polso, 87

– Newton-Eulero, 280

– spalla, 241

Amar, 12

astragalo, 20, 94

analisi

attrito, 211

– baropodometrica, 173

– esercizi, 255

– cammino, 97

– piano inclinato, 212

- del cammino, VI, 249
- volvente, 213, 214
- delle forze, 205
- azioni di un fluido su un corpo solido, 224
 - statica, VI, 206, 241
- anatomia, V, 1, 3, 4, 6, 18, 22
- baricentro, VI
- anca, 84, 85, 100, 163
 - corpi irregolari, 191
 - flessione, 93
 - determinazione sperimentale, 193
 - flessione-estensione, 96
 - di sezioni piane, 187
- angolo di Eulero, 18, 34, 37
 - di solidi regolari, 189
- annulus fibrosus, 23
 - di un corpo esteso, 185
- appoggio
- basket, 134
 - bipodalico, 249

Bernoulli, Jacob, 10

– monopodalico, 249, 253, 254

Bernoulli, Johann, 10

– piano, 21, 22

Bernstein, Nicholas, 12

– semplice, 16, 18, 19

Bibbia, 6

– singolo, 163

bioingegneria, VI

– terminale, 163

biomeccanica, V, VI

Archimede di Siracusa, 3

Borelli, Giovanni, 8

Aristotele, 2

Braune, Wilhelm, 11

articolazione, VI

Breithaupt, 12

– anca, 84, 92

– caviglia, 20

calcio, 132

– condiloartrosi, 84

calibrazione della telecamera, 69

– coxo-femorale, 20

Cartesio, 7

348

Indice analitico

cartilagine, 20, 82, 83, 85

decremento logaritmico, 328

– ialina, 83

diagramma

caso

– a blocchi

– di sollecitazione, 238

– Simulink, 117

causa

– di corpo libero, 207, 230, 238, 243

– movimento, 9

– di corpo libero del braccio, 243

caviglia, 20

– di corpo libero della gamba, 254

- azioni sulla, 251
- forza-allungamento di una molla, 218
- flessione palmare e dorsale, 95

diartrosi, 83

- flesso-estensione, 102

Die Mechanik der menschlichen

- rotazione, 159

Gewerkzeuge, 11

- strategia di, 276

dinamica, 265

- traiettoria, 171
- del corpo rigido, 267
- velocità, 157
- del punto materiale, 265

ciclo del cammino, 162

- della postura, 275

cinematica, VI, 119

- diretta, 284
- catena, 84
- diretta e inversa, 276

- coppia, 21
- diretta sistemi articolati, 284
- diretta, 47
- leggi della, 8
- diretta e inversa, 172
- seconda legge della, 229
- inversa, 48, 57
- terzo principio, 233

colonna vertebrale, 248

contrazione

dinamico

- concentrica, 293
- inverso, 159
- eccentrica, 293

disciplina sportiva, VI

- isometrica, 108, 113

Du Bois Reymond, 12

- isotonica, 113

Duchenne, 12

- libera, 106

– velocità, 116

eccitazione non periodica, 332

corpo

eccitazione tetanica, 107

– rigido, VI, 16, 21, 59, 81

elemento flessibile, 235

cinematica, 146

elettromiografia, 12

dinamica, 267

energia

equilibrio, 270

– cinetica, 300

moto di un, 147

– metabolica, 162

moto intorno a un punto fisso, 273

– potenziale, 298, 302

teorema di Rivals, 148

– potenziale elastica, 304

Cross Bridge Theory, 13

equazioni

D'Alembert, 9

– di Newton-Eulero, 276

De humanis corporis fabrica libri septem, 6

equilibrio, VI

De motu musculorum, 4

– del capo, 247

De usu partium, 4

– del gomito, 244

deambulazione, V, 102

– del tronco, 254

– analisi della, 159

– della gamba, 249

– ciclo di, 156

– della spalla, 242

– corretta, 95

Erofilo, 3

– lavoro meccanico, 161

Erone di Alessandria, 3

decibel, 318

estensione e flessione, 93

Indice analitico

349

Eulero, 9, 10

gait analysis, 59

– relazione di, 315

Galeno, 4

eversione-inversione, 94

Galileo, 6

geometria

fattore d'amplificazione, 330

– delle masse, 185

femore, 20, 58, 85

– Euclidea, 3

– articolazione, 101

giavellotto, 132

– equilibrio, 251

ginocchio, 20

– rotazione, 156

– articolazione, 93

fenomeno impulsivo, VII

giunto

– cilindrico, 21

FFT – Fast Fourier Transform, 316

– piano, 18

figure piane, 186

– prismatico, 19, 21

filosofia

– rotoideale, 18

– della natura, 1

– sferico, 21

Fischer, Otto, 11

– sinoviale, 83

fisiologia, VII, 4

– spaziale, 21

– Borelli, 8

gomito

– dei muscoli, 12

– equilibrio, 246

– del muscolo, 8

– flessione-estensione, 103

- Descartes, 7
- gradi di libertà, 86
- Hill, 12
- grado di libertà, 16
- flessione, 240, 249
- gravità, 227
 - caviglia, 94
- Grood and Suntay, 38
 - del ginocchio, 50
 - del gomito, 50
- Hartenberg, Denavit, 46
 - del polso, 87
- Harvey, William, 7
 - del tronco, 136
- Hill, A.V., 12, 110
 - dell'anca, VI, 249
- Huxley, A.F., 13
 - della colonna, 248
 - dorsale, 87
- incastro, 18, 19

– ginocchio, 93

– spaziale, 22

– palmare, 87

inversa di una matrice di trasformazione, 33

– plantare della caviglia, 135

iperstatico, 16, 230

– sollecitazione di, 240

– corpo, 17

flessione-estensione

– equilibrio, 16

– polso, 87

– problema, 234

formulazione Lagrangiana, 283

Ippocrate, 1

forze, 205

ISO 2631-1 Esposizione del corpo umano

– di campo, 227

alle vibrazioni, 336

– elastiche, 217

isometrica

- elettromagnetiche, 227
- contrazione, 107
- impulsiva nel salto ripetuto, 292
- forza massima statica, 115
- interna ed esterna, 205
- simulazione contrazione bicipite, 117
- viscosi, 214
- tensione massima, 110

Fourier

- trasformazione, 106
- serie, 315

isostatico, 16

frequenze naturali di vibrazione

- corpo, 17
- metodo energetico, 323
- equilibrio, 16, 230

350

Indice analitico

isotonica

- identità, 37

- contrazione, 106, 107
- inversa di una matrice di rotazione, 25
- contrazione Hill, 108
- Jacobiano, 156
- ortonormale, 25

Laban, Rudolph, 13

- traslazione, 29

Lagrange, 9

meccanica, V

lancio nello sport, 131

- applicazione al movimento umano, 6

Laplace

- dei corpi rigidi, VII
- trasformata di , 332
- di Galileo, 7

lavoro, 298

- energia, 290
- delle forze d'inerzia, 301
- filosofia, 8
- di deformazione, 218

- Hill, 12
- di deformazione flessione, 300
- linguaggio della, 18
- meccanico, 162
- modellazione, 252

legamenti

- Newtoniana, VII
- collaterali, 94
- potenza, 109
- colonna, 248
- razionale, 3
- comportamento a trazione, 107
- sollecitazione, 83
- crociati, 94, 153

microcosmo, 5

modello quadrilatero articolato, 154

miofibrille, 104

- ileo-femorale, 93

miofilamento, 105

- iliofemorali, 275

miosina, 105

– pendolo inverso, 275

– banda A, 105

– posteriori del ginocchio, 275

– filamenti, 13, 105

– pubo-femorale, 93

– sovrapposizione filamenti, 112

Leonardo da Vinci, 6

– teste della, 105

modello

mappatura, 26

– a segmenti del corpo umano, 169

– di un vettore, 28

– arto inferiore, 19

– operatore matriciale, 28

– cross bridge theory, 105

– sistemi ruotati e traslati, 27

– della lente, 73

– tra riferimenti ruotati, 26

– di Coulomb, 211

Marey, Etienne Jules, 11

– di Hill, 12

masse, 185

– di Hill a tre elementi, 111

– geometria delle, VI

– di Hill, parametri, 113

– puntiformi, 280

– matematico, VII

Matlab, VI

– piano della gamba, 20

matrice

– posturale, 275

– antisimmetrica, 34

– sliding filament theory, 13

– braccio, 90

modo

– coxo-femorale, 57

– di vibrare, 324

– d'inerzia, 147, 194

momento

- dei coseni direttori, 24
- angolare, 269
- di prospettiva, 60
- d'inerzia, VI, 195
- di rotazione, 24
- d'inerzia della sezione a C, 197
- di rototraslazione, 32
- d'inerzia di figure piane, 196
- di trasformazione, 28
- d'inerzia di una sezione circolare, 197
- di trasformazione omogenea, 25, 28
- d'inerzia polare, 300
- di trasformazione spalla-polso, 118
- d'inerzia totale, 195

Indice analitico

351

- della quantità di moto, 266, 267
- gradi di libertà, 16
- della risultante, 187
- legge, 48

– flettente, 240

muscolo, VI, 9

– risultante, 208, 297

– effetti meccanici, 106

– torcente, 240

– elettromiografia. Duchenne, 12

momento risultante

– modello di Hill, 112

– delle forze muscolari, 243

– PCSA, 101

mondo iperuranico, 5

– scheletrico, 99

moti

– tetanico, 109

– periodici, 315

Muybridge, Edward, 11

moto

– armonico, 314

neoplatonismo, 4

accelerazione, 314

Newton, Isaac, 8

velocità, 314

– balistico piano, 129

operatore, 29

– circolare, 126

– di rotazione, 29

– degli uccelli, 6

– di rototraslazione, 31

– dei corpi celesti, 8

ortopedia, VIII

– dei pianeti. Keplero, 8

oscillatore

– di puro rotolamento, 148

– semplice, 313

– di rotolamento con strisciamento, 149

– semplice smorzato, 325

– di un corpo entro un fluido, 218

oscillazioni

– di una ruota soggetta ad una coppia

– ampiezze, 314

motrice intorno al suo asse, 271

– periodo, 314

– di una ruota su una guida sotto l'azione di

– valore efficace, 318

una forza costante nel suo centro, 270

– valore medio, 317

– di uno sciatore, 126

– valore quadratico medio, 318

– oscillatorio smorzato, 327

osservazione

– piano, 150

– scientifica, 1

– relativo, 18, 85, 138

– relativo tra due aerei, 181

PCSA – Physiological Cross Section Area,

– relativo, applicazione, 180

245, 246

– rettilineo, 120

piano e asse di riferimento, 15

– rettilineo uniforme, 120

piano inclinato, 212

– rettilineo uniformemente accelerato, 120

piede

– sistema di due corpi, 288

– come trave appoggiata, 252

motoneuroni, 105

Pitagora, 1

movimento, V

Platone, 2

– analisi. Marey, 11

Plotino, 4

– Borelli, 8

pneuma, 4

– Cartesio, 8

polso

– degli animali, 3

– gradi di libertà, 87

– dei pianeti. Galileo, 8

postura, V

– elementare, 84

principio di d'Alembert, 228

– elementare nella biomeccanica del corpo

profilo

umano, 84

– aerodinamico, 221

– forze dovute al moto di un corpo entro un

– cinematico del condilo, 154

fluido, 215

prono-supinazione, 94

– Galeno, 4

proprietà inerziali, 194

352

Indice analitico

propulsione

– di molle in serie, 217

– dei pesci, 224

– di riferimento anatomico LRS, 66

– velica, 226

– di riferimento globale, 66

protesi, V

– di riferimento locali e anatomici, 65

pulsazione, 314

– di riferimento telecamera, 64

– delle oscillazioni libere, 326

– di rilevamento del moto, 59

punto materiale, VI, 119

– globale, 62

– globale GRS, 66

quantità

– locale baricentrico LCRS, 67

– di moto, 265

– multi-body, 16

quick release, 106

– nervoso, 9

– ottico, 59

rappresentazione di orientamenti, 24

– per l'analisi della postura e del movimento,

Rayleigh

58

– metodo di, 324

– spaziale gradi di libertà di un, 22

reazione, VI

sistemi

– vincolare, 207

– a 2 g.d.l.

riabilitazione, 273

– modi normali, 339

ricostruzione stereoscopica, 73

– a due gradi di libertà, 337

riferimento Cartesiano, 23

smorzamento, 313

rilievo sperimentale delle pressioni, 169

sollecitazione

Rinascimento, 5

– flessione, 240

rischio

– torsione, 239

– occupazionale, 336

– trazione, 205

risultante, 208

spalla, 86, 241

roll-pitch-yaw, 36

– flessione-estensione, 86

rotazione

– esterna e interna, 93

telecamere, 174

– intorno ad assi fissi, 35

teorie Copernicane, 7

roto-traslatorio, 119

terna, 25

testa del femore, 85

salto in lungo, 134

tetanica

San Tommaso d’Aquino, 5

– in condizioni isometriche, 106

Sant’Agostino, 5

The Human Motor, 12

Santorio, Santorio, 7

tibia, 20

sarcomeri, 105

tibiotarsica

scelto dei sistemi di riferimento, 45

– articolazione, 94

serie di Fourier

torsione, 239

– forma esponenziale, 317

traiettoria, 90

Simulink, VI

trasformata omogenea, 28

sinartrosi, 81

trasformazione composta, 32

sinusoide

traslazioni, 16

– complessa, 315

trazione degli arti, 236

sistema

trazione-comprensione, 239

– articolato, 16, 152

twitch, 105

– articolato riferimento, 45

– ciclista più bici è in G, 307

urto, 288

– coordinate Cartesiane, 7

– centrato diretto, 289

– di forze nello spazio, 210

– centrato obliquo, 290

Indice analitico

353

versore, 24

– mano braccio, 313

Vesalio, 6

– metodo delle masse concentrate, 325

vettore

– whole body, 313

– rotante, 315

vincoli, 16

viscosità

vibrazioni

– dinamica, 215

– del corpo umano, 334

voli suborbitali, 127

– forzate, 328

Volkman, 12

– in ambiente di lavoro, 335

– libere, 319

Watt, James, 11

Unitext – Collana di Ingegneria

Editor in Springer:

F. Bonadei

francesca.bonadei@springer.com

G. Riccardi, D. Durante

Elementi di fluidodinamica. Un'introduzione per l'Ingegneria

2006, XIV+394 pp, ISBN 978-88-470-0483-2

F. Babiloni, V. Meroni, R. Soranzo

Neuroeconomia, neuromarketing e processi decisionali nell'uomo

2007, X+164 pp, ISBN 978-88-470-0715-4

D. Milanato

Demand Planning. Processi, metodologie e modelli matematici

per la gestione della domanda commerciale

2008, XIV+600 pp, ISBN 978-88-470-0821-2

S. Beretta

Affidabilità delle costruzioni meccaniche. Strumenti e metodi
per l'affidabilità di un progetto

2009, X+276 pp, ISBN 978-88-470-1078-9

M.G. Tanda, S. Longo

Esercizi di Idraulica e di Meccanica dei Fluidi

2009, VI+386 pp, ISBN 978-88-470-1347-6

A. Giua, C. Seatzu

Analisi dei sistemi dinamici

2009, XVI+566 pp, ISBN 978-88-470-1483-1

P.C. Cacciabue

Sicurezza del Trasporto Aereo

2010, X+274 pp, ISBN 978-88-470-1453-4

D. Capecchi, G. Ruta

La scienza delle costruzioni in Italia nell'Ottocento.

Un'analisi storica dei fondamenti della scienza delle costruzioni 2011,
XII+358 pp, ISBN 978-88-470-1713-9

S. Longo

Analisi Dimensionale e Modellistica Fisica

Principi e applicazioni alle scienze ingegneristiche

2011, XII+370 pp, ISBN 978-88-470-1871-6

R. Pinto, M.T. Vespucci

Modelli decisionali per la produzione, la logistica e i servizi energetici 2011,
XIV+149 pp, ISBN 978-88-470-1790-0

A. Di Molfetta, R. Sethi

Ingegneria degli acquiferi

2012, XIV+416 pp, ISBN 978-88-470-1850-1

C. Gisonni, W.H. Hager

Idraulica dei sistemi fognari. Dalla teoria alla pratica

2012, XX+682 pp, ISBN 978-88-470-1444-2

B. Picasso

Fondamenti di Meccanica e Biomeccanica

Meccanica dei corpi rigidi articolati

2012, X+354 pp, ISBN 978-88-470-2332-1

La versione online dei libri pubblicati nella serie è disponibile su
SpringerLink. Per ulteriori informazioni, visitare il sito:

<http://www.springer.com/series/7281>

Document Outline

- [Title Page](#)
- [Copyright Page](#)
- [Prefazione](#)
- [Table of Contents](#)
- [1 Introduzione](#)
 - [1.1 Cenni storici](#)
- [2 Riferimenti Cartesiani per i sistemi multibody](#)
 - [2.1 Piani e assi di riferimento per l'analisi biomeccanica](#)
 - [2.2 Gradi di libertà per un sistema articolato](#)
 - [2.3 Giunti piani e giunti spaziali](#)
 - [Giunti piani](#)
 - [Giunto rotoidale](#)
 - [Incastro](#)
 - [Appoggio semplice](#)
 - [Giunto prismatico](#)
 - [Giunti spaziali](#)
 - [Giunto sferico](#)
 - [Giunto prismatico](#)
 - [Giunto cilindrico](#)
 - [Appoggio piano](#)
 - [Incastro spaziale](#)
 - [2.4 Descrizione di posizioni e giaciture rispetto a un sistema Cartesiano](#)
 - [Rappresentazione di orientamenti](#)
 - [Descrizione di un sistema di riferimento solidale a un corpo mobile](#)
 - [Cambiamento del sistema di riferimento](#)
 - [Mappatura tra riferimenti ruotati](#)
 - [Mappatura per sistemi di riferimento ruotati e traslati](#)
 - [2.5 Operatori: traslazioni, rotazioni e trasformazioni](#)
 - [Operatori di rotazione](#)
 - [Operatori di rototraslazione](#)
 - [Trasformazioni composte](#)
 - [Inversa di una matrice di trasformazione](#)

- 2.6 Numero di parametri minimo per rappresentare un'orientazione
 - Sequenze di rotazione intorno ad assi fissi
 - Angoli di Eulero Z'-Y'-X'
 - Rotazione infinitesima intorno ad un asse generico
 - Sequenza di rotazioni infinitesime intorno ai tre assi
 - Rotazione rispetto a un asse generico
- 2.7 Scelta dei sistemi di riferimento
 - Applicazione alle strutture scheletriche e muscolari del corpo umano
- 2.8 Sistemi per l'analisi della postura e del movimento
 - Sistemi di riferimento locali e anatomici
 - Sistema di riferimento globale
 - Sistema di riferimento anatomico
 - Calibrazione della telecamera
 - Ricostruzione stereoscopica
 - Esercizi
- 3 Le articolazioni
 - 3.1 Gradi di libertà nella biomeccanica. Le articolazioni
 - Sinartrosi
 - Sinfibrosi
 - Sincondrosi
 - Sinfisi
 - Diartrosi
 - Artrosi
 - Enartrosi (1)
 - Condiloartrosi (2)
 - A sella (3)
 - Ginglino laterale o trocoide (4)
 - Ginglino angolare o troclea (5)
 - Movimenti elementari nella biomeccanica del corpo umano
 - I tre gradi di libertà della spalla
 - I due gradi di libertà del gomito
 - Gradi di libertà del polso
 - Traiettorie
 - I movimenti elementari dell'arto inferiore
 - Articolazione dell'anca

- [Estensione e flessione](#)
 - [Abduzione e adduzione](#)
 - [Rotazione esterna e interna](#)
 - [Articolazione del ginocchio](#)
 - [Articolazione tibiotarsica](#)
 - [3.2 Un modello cinematico piano dell'arto inferiore](#)
- [4 I muscoli scheletrici](#)
 - [Flessione-estensione dell'anca](#)
 - [Rotazione dell'anca](#)
 - [Flesso-estensione del ginocchio](#)
 - [Flesso-estensione della caviglia](#)
 - [Flesso-estensione del gomito](#)
 - [4.1 Struttura e modelli di comportamento del muscolo scheletrico](#)
 - [4.2 Il meccanismo contrattile](#)
 - [4.3 Proprietà statiche e dinamiche](#)
 - [4.4 La relazione forza-velocità di contrazione](#)
 - [4.5 L'equazione di Hill per il muscolo tetanico](#)
 - [Forma adimensionale](#)
 - [Giustificazione energetica dell'equazione di Hill](#)
 - [4.5.1 Il modello di Hill a tre elementi](#)
 - [L'esperimento di "Quick release"](#)
 - [Esercizi](#)
- [5 Elementi di cinematica](#)
 - [5.1 Cinematica del punto materiale](#)
 - [5.2 Moto rettilineo](#)
 - [5.3 Moto circolare](#)
 - [5.4 Moti balistici piani](#)
 - [I lanci nello sport](#)
 - [Il salto in lungo](#)
 - [Il salto in alto](#)
 - [Esercizi](#)
 - [5.5 Moto relativo](#)
 - [5.6 Cinematica del corpo rigido](#)
 - [5.7 Moti rigidi piani](#)
 - [Moto di puro rotolamento](#)
 - [Moto di rotolamento con strisciamento](#)
 - [5.8 Moto piano generico](#)

- [5.9 Analisi di un sistema articolato](#)
- [5.10 Un sistema articolato con due segmenti](#)
- [5.11 Analisi della deambulazione](#)
 - [Il ciclo del cammino](#)
 - [Modello a segmenti del corpo umano](#)
 - [Determinazione di posizioni e traiettorie](#)
- [5.12 Analisi cinematica](#)
 - [Cinematica diretta e inversa. Obiettivi della biomeccanica](#)
- [Esercizi](#)
 - [Velocità e accelerazioni](#)
 - [Velocità e accelerazione durante la corsa](#)
 - [Velocità e accelerazione durante la pedalata](#)
- [6 Geometria delle masse](#)
 - [6.1 Baricentro di un corpo esteso](#)
 - [6.2 Baricentri di figure piane](#)
 - [Esempi](#)
 - [6.3 Baricentro di solidi regolari](#)
 - [6.4 Baricentro di corpi irregolari](#)
 - [Determinazione sperimentale dei baricentri](#)
 - [6.5 Proprietà inerziali](#)
 - [Momenti d'inerzia di figure piane](#)
 - [Momento d'inerzia di una sezione circolare](#)
 - [Momenti d'inerzia di sezioni composite](#)
 - [Esercizi](#)
 - [Baricentri e momenti d'inerzia](#)
- [7 Analisi delle forze](#)
 - [7.1 Forze interne ed esterne](#)
 - [Trasporto lungo la linea d'azione](#)
 - [Determinazione delle risultanti e del momento risultante di un sistema di forze](#)
 - [Determinazione della risultante](#)
 - [7.2 Forze d'attrito](#)
 - [Piano inclinato](#)
 - [7.3 Attrito volvente](#)
 - [7.4 Forze viscoso](#)
 - [7.5 Viscosità cinematica](#)
 - [7.6 Forze elastiche](#)

- [Lavoro di deformazione di una molla elastica](#)
 - [7.7 Corpi in movimento entro un fluido](#)
 - [Effetto Magnus](#)
 - [7.8 Azioni di un fluido su un corpo solido](#)
 - [7.9 Forze di campo](#)
 - [Forze di gravità](#)
 - [Forze elettromagnetiche](#)
 - [Forze d'inerzia. Il principio di d'Alembert](#)
- [8 Elementi di statica](#)
 - [8.1 Equilibrio di semplici elementi strutturali](#)
 - [Leggi dell'equilibrio statico](#)
 - [Alcuni semplici sistemi](#)
 - [Problema a\)](#)
 - [Vincoli interni](#)
 - [Problema b\)](#)
 - [Problema c\)](#)
 - [Problema d\)](#)
 - [Travi incastrate ad un estremo e libere all'altro](#)
 - [8.2 Elementi strutturali. Cenno sui casi di sollecitazione](#)
 - [Trazione-compressione](#)
 - [Torsione](#)
 - [Flessione](#)
 - [8.3 Applicazione dei principi della statica alla biomeccanica](#)
 - [La spalla](#)
 - [Una seconda approssimazione](#)
 - [Equilibrio del gomito](#)
 - [Lo stesso problema ma con più muscoli](#)
 - [Equilibrio del capo](#)
 - [La colonna vertebrale](#)
 - [Equilibrio della gamba](#)
 - [Il piede come elemento strutturale](#)
 - [Appoggio monopodalico](#)
 - [Equilibrio del tronco](#)
 - [Esercizi](#)
 - [Attrito](#)
- [9 Dinamica](#)
 - [9.1 Dinamica del punto materiale](#)

- [9.2 Quantità di moto e momento della quantità di moto](#)
- [9.3 Dinamica del corpo rigido](#)
 - [La postura](#)
 - [Equazioni di Newton-Eulero](#)
 - [Soluzione in forma chiusa o numerica per l'algoritmo di Newton-Eulero](#)
 - [Cenni sulla formulazione Lagrangiana](#)
 - [Applicazioni. Dinamica diretta di semplici sistemi articolati](#)
- [9.4 Fenomeni d'urto](#)
 - [Urto tra corpi liberi](#)
 - [Urto centrato diretto](#)
 - [Urto centrato obliquo](#)
- [9.5 Lavoro ed energia](#)
 - [Energia potenziale](#)
 - [Energia potenziale elastica](#)
 - [Trazione](#)
 - [Torsione](#)
 - [Flessione](#)
 - [Energia cinetica](#)
 - [Lavoro delle forze d'inerzia](#)
- [Esercizi](#)
 - [Equilibrio dinamico](#)
 - [Energia potenziale elastica](#)
 - [Conservazione del momento della quantità di moto](#)
 - [Equilibrio dinamico](#)
- [9.6 Piccole oscillazioni](#)
 - [Forma esponenziale della legge del moto](#)
 - [Moti periodici](#)
 - [Termini utili](#)
 - [Esercizi](#)
 - [9.6.1 Vibrazioni libere](#)
 - [Metodo energetico per determinare le frequenze proprie](#)
 - [Metodo delle masse concentrate](#)
 - [Oscillatore semplice smorzato](#)
 - [Decremento logaritmico](#)
 - [Vibrazioni forzate nei sistemi ad un grado di libertà](#)
 - [Eccitazione non periodica](#)

- [Effetti delle vibrazioni sul corpo umano](#)
- [Vibrazioni in ambiente di lavoro](#)
- [Sistemi a parametri concentrati, due o più gradi di libertà](#)
- [9.7 Rigidezza di alcuni elementi strutturali](#)
- [Bibliografia](#)
- [Indice analitico](#)